الموترات وتطبيقاتها

تأليف

د. علي محمد عوين
كلية العلوم – جامعة الفاتح

د. الطاهر الصادق الشريف
مركز بحوث الليزر



منشورات ELGA
2001

المحتويات

الفصل الرابع: التفاضل الموافق للتغاير

Covariant Differentiation

الفصل الخامس: الجيوديسيات والانحناء

Geodesics and Curvature

الفصل السادس: تطبيقات الموترات

الفصل الأول

مقدمة *Introduction*

1.1 تمهيد:

ظهرت الموترات (أو الممتدات *Tensors*) منذ أن بدأ تطور الهندسة التفاضلية وذلك عن طريق علماء أفذاذ مثل جاوس وريمان وكريستفل ويسمى بحسبان الموترات أو أحياناً بالحسبان المطلق وتنظيمه على هذا النحو كان على يد ريتشي وطالبه ليفي سيفيتا.

ولقد بنى هذا العلم على تحريات حول العلاقات التي تبقى صالحة عندما يتم التغير من منظومة إحداثيات إلى منظومة أخرى، وهذه هي الوظيفة الأساسية لهذا الفرع من الرياضات. أي أن الهدف هو أيجاد إطار يتم من خلاله صياغة مثل هذه العلاقات والقوانين. نذكر مثلاً أن آينشتين وجد حسبان الموترات أداة جيدة لتقديم النظرية النسبية العامة، وهذا ما سنوضحه بشئ من التفصيل في الفصل الأخير من هذا الكتاب.

هذا المجال، أي مجال حسبان الموترات، أصبح ذي أهمية بالغة في الفيزياء النظرية، هذا أيضاً أمر سنوضحه من خلال أمثله كثيرة فيما بعد. كذلك لا يمكننا الاستغناء عن حسبان الموترات عند دراستنا للهندسة التفاضلية.

وكبداية لدراسة حسبان الموترات نفترض أن الطالب قد تعرض لدراسة المحددات والمصفوفات.

2.1 الفضاء نوني البعد (N - Dimensional space)

ليكن لدينا مجموعة مرتبة N من المتغيرات الحقيقية $\{X^1, X^2 ... ,X^i ... ,X^N\}$، هذه المتغيرات نسميها بإحداثيات نقطة. نلاحظ أن الأرقام $i = 1, 2, ..., N$ هنا تعمل كدليل للإحداثيات وليست كقوى.

وكل النقاط التي تماثل قيم المتغيرات x^i تكون ما نسميه بالفضاء نوني البعد (أو ذي البعد N) ونرمز له بالرمز V_N. ويمكن اشتراط مدى معين لبعض أو كل هذه الإحداثيات وذلك في تناظر احادي *(One - One Correspondense)* بين نقاط V_N ومجموعات من الإحداثيات.

والمنحنى *(Curve)* في V_N يعرف على أنه النقاط التي تحقق N من المعادلات التالية:

$$x^i = x^i (u) \quad (i = 1, 2, \dots , N) \qquad (1.1)$$

وحيث U بارامتر و $x^i (U)$ هي N من الدوال في U تحقق شروط استمرارية معينة. ونطلب عموماً، أن المشتقات تتواجد إلى أي رتبة نشاء.

3.1 الفضاء الجزئي (Subspace)

الفضاء الجزئي V_M (بحيث $M < N$) من الفضاء V_N يعرف على أنه المجموعة التي تحقق N من المعادلات:

$$x^i = x^i (U^1 , U^2 , \dots , U^M) \quad (i = 1, 2 , \dots , N) \qquad (2.1)$$

وحيث $U^1 , U^2 , \dots , U^M$ هي M من البارامترات، كما أن $x^i (U^1 , \dots U^M)$ هي N من الدوال في هذه البارمترات والتي تحقق شروط استمرارية معينة.

اضافة إلى ذلك المصفوفة المكونة من المشتقات الجزئية $\frac{\partial x^i}{\partial U^j}$ وذات البعد $M \times N$ تعتبر من الرتبة M ، وعندما يكون $M = N - 1$ فإن الفضاء الجزئي يسمى بالسطح الزائدي *(Hyperspace)*.

وعلى سبيل المثال لو أن $N = 3$ ، أي أننا نتعامل بالفضاء ثلاثي البعد V_3، وكانت المنظومة المستخدمة هي منظومة الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة، عندئذ فإن $x^1 = x$ ، $x^2 = y$ ، $x^3 = z$ ؛ و V_2 وهو فضاء في المستوى، هو فضاء جزئي من V_3. وكذلك لو تعاملنا في V_3 بالإحداثيات الكروية فإن $x^1 = r$ ، $x^2 = \theta$ ، $x^3 = \phi$ و V_2 هو الفضاء الجزئي وحيث نتعامل عندئذ بالإحداثيات القطبية. والمنحنى في V_3 يمكن أن يكون البارامتر فيه هو الزمن t.

4.1 تحويل الإحداثيات Tronsformation of Co-ordinates

لنأخذ في الاعتبار الفضاء V_N بمنظومة الإحداثيات $(x^1, x^2, \dots, x^N)$

ولو أن:

$$\bar{x}^i = \phi^i (x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \qquad (3.1)$$

حيث ϕ^i هي دوال مستمرة وقابلة للإشتقاق وذات قيمة مفردة *(single - valued)*، عندئذ تكون هذه المعادلات معرفة لمنظومة إحداثيات جديدة:

$(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$، والمعادلة *(3.1)* يقال عنها بأنها تمثل تحويله في الإحداثيات.

من المهم ملاحظة أن الدوال ϕ^i مستقلة عن بعضها البعض. والشرط الضروري والكافي لكي يحدث ذلك هو أن يكون محدد التحويلة (الجاكوبي *Jacobian*) والمكون من المشتقات $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ لايساوي الصفر، وهذا بالطبع يمكننا أيضاً من ايجاد x^i بدلالة $\bar{x}^i$. أي أننا نستطيع كتابة التحويلات:

$$x^i = x^i (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \qquad (4.1)$$

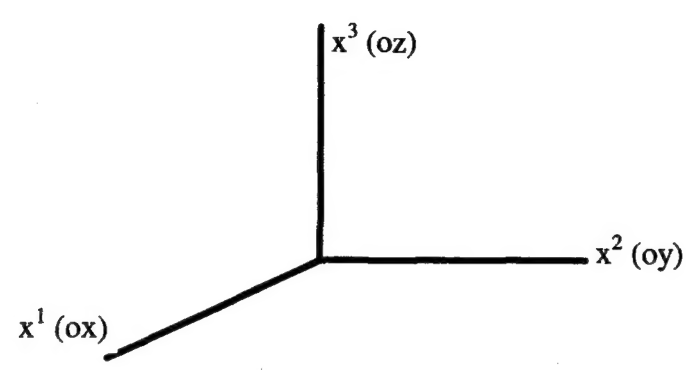
وحيث x^i هي أيضاً دوال مستمرة وقابلة للإشتقاق وذات قيمة مفردة. لو أخذنا على سبيل المثال منظومة الإحداثيات الاسطوانية (أي أن $x^1 = \rho$ ، $x^2 = \phi$ ، $x^3 = z$) وأردنا التحويل إلى منظومة الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة :

$$\{\bar{x}_3 = z \ , \ \bar{x}_2 = y , \ \bar{x}_1 = x\}$$

فإن معادلات التحويل هي:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x = \rho\cos\phi = x^1\cos x^2 \\ \bar{x}^2 &= y = \rho\sin\phi = x^1\sin x^2 \\ \bar{x}^3 &= z = x^3 \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

وجاكوبي التحويلة في هذه الحالة يساوي ρ وهو أكبر من الصفر لنقاط التحويلة.



الشكل (1.1) الاحداثيات الكارتيزية المتعامدة

وبصدد الحديث عن منظومات الإحداثيات نعرج قليلاً للحديث عن هذه المنظومات في صورة أعم وأشمل وحيث ندرس ما نسميها بالإحداثيات الخطية المنحنية *(Curvilinear coordinates)* فنحن نعلم بأنه في حالة الإحداثيات

الكارتيزية نقوم باختيار ثلاثة محاور متعامدة في هذه المستويات بحيث تتقاطع في نقطة الأصل [انظر الشكل *(1.1)*]؛ ونلاحظ أن $x^1 = a$ هو مستوى يوازي المستوى $x^2 x^3$ وعلى بعد a منه، كذلك $x^2 = b$ هو مستوى يوازي المستوى $x^1 x^3$ وعلى بعد b منه، بالمثل المستوى $x^3 = c$ هو مستوى مواز للمستوى $x^1 x^2$ وعلى بعد c منه.

نعمم ونأخذ في الاعتبار ثلاثة سطوح [ليست بالضرورة أن تكون متعامدة الشكل *(2.1)*]؛ والسطوح ذات العلاقة هنا هي:

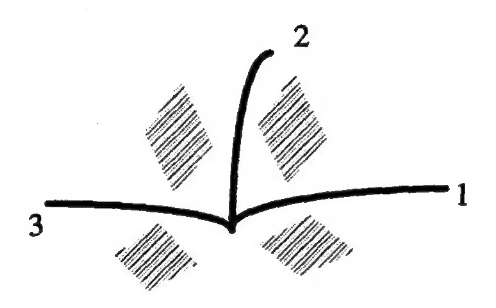
$$q^i = \text{ثابت} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (6.1)$$

(أو ثابت = x^i). ومن حيث المبدأ نستطيع أن نحصل على التحويلات:-

$$x^i = x^i (q^1 , q^2 , q^3) \qquad (i = 1 , 2 , 3) \qquad (7.1)$$

وكذلك التحويلات العكسية:

$$q^i = q^i (x^1 , x^2 , x^3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$



الشكل *(2.1)* الإحداثيات الخطية المنحنية

لاحظ أننا هنا نناقش منظومات احداثيات في الفضاء V_3 ولكل عائلة سطوح (q^i = ثابت) نعين وحدة متجه $\hat{e}_i$ يكون عمودياً على السطح في اتجاه زيادة q^i (مثلاً $\hat{e}_1 = i$ هو وحدة متجه في الاتجاه ox، أي في اتجاه زيادة x^1 وعمودي على السطح $x^1 = a$ ، أي عمودي على السطح $x^2 x^3$).

ولكن نحن نعلم أن طول المنحنى ds في V_3 هو كمية لازمة (لا متغير *(Invariant)* ، أي أنه لا يعتمد على منظومة الإحداثيات المستخدمة في حسابه. فمثلاً البعد بين نقطتين في المستوى ثابت ولا يتغير إذا ما حسبناه في الإحداثيات الكارتيزية أو في الإحداثيات القطبية.

وهذه الخاصية تمكننا من الحصول على التحويلات المطلوبة بين منظومة احداثيات وأخرى وبالتالي حساب الموترات المتجهية التفاضلية مثل التدرج والانحدار *(Gradient)* والانفراج أو التباعد *(Divergence)* واللفة أو الالتفاف *(Curl)* بدلالة الإحداثيات الخطية المنحنية؛ غير أنه سوف نرجا الخوض في هذه المواضيع حتى الوصول إلى دراسة فضاء ريمان *(Riemannian Space)*.

5.1 الجمع الاصطلاحي (Summation Convention)

في هذا الكتاب سوف نصطلح على ما يلي:

أولاً:-

الأدلة اللاتينية *(Latin Indices)* مثل:

$i, j, k, \dots, r, s, t, \dots$ ؛ إذا ما استعملت كأدلة تحتية أو علوية فإنها تأخذ كل القيم من 1 إلى N إلاّ إذا نص على غير ذلك أي أنه عندما نكتب:

$$\bar{x}^i = \phi^i (x^1, x^2, \dots, x^N) \qquad (8.1)$$

فإننا نعني أنه لدينا N من المعادلات أو أن

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

ثانياً:

إذا أعيد أي دليل لاتيني في أي حد فإنه يفهم بأنه يوجد جمع على ذلك الدليل. أي أننا نكتب $\sum_{i=1}^{N} a_i x^i$ على صورة $a_i\ x^i$ و $\sum_{j=1}^{N} a_j \bar{x}^j$ على صورة $\bar{x}^j a_j$. وحيث أن $\sum_{i=1}^{N} a_i x^i = \sum_{j=1}^{n} a_j x^i$ فإن $a_i\ x^i$ نفس الكمية $a_j\ x^j$ ونفس الكمية $a_k\ x^k$، وهذا يعني أن i متغير دمية *(Dummy Variable)* ويمكن الاستعاضة عنه بالدليل j أو k أو أي دليل لاتيني آخر ولا يتأثر الجمع بل يبقى كما هو معطياً نفس الناتج.

الآن لو فاضلنا المعادلات *(8.1)* فإننا نحصل على:-

$$d\bar{x}^i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^r} dx^r = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (9.1)$$

وباستخدام الجمع الإصطلاحي نكتب *(9.1)* على الصورة:

$$d\,\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r \qquad (10.1)$$

وحيث r هنا متغير دمية، كما أسلفنا، ويمكن استبداله بأي دليل لاتيني آخر. أي أن:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} dx^m = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} dx^l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r \qquad (11.1)$$

للأهمية نلاحظ أنه لا نستعمل نفس الدليل أكثر من مرتين في حد واحد حتى لا يحدث خلط بالأمور. مثلا نكتب الحدين $\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x^i\right)^2$ و $\left(\sum_{j=1}^{N} a_j y^j\right)^3$ على الصورتين $a_i a_j x^i x^j$ و $a_i a_j a_k y^i y^j y^k$ على التوالي.

ولا نكتبها على الصورتين $a_i a_i x^i x^i$ و $a_i a_i a_i y^i y^i y^i$.

مثال (1.1)

إذا كان لدينا الكمية $\left(\sum_{j=1}^{N} b_j S^j\right) \left(\sum_{i=1}^{N} a_i T^i\right) = F$ فاكشف عن مدى صحة المعادلات الموالية:

أ - $F = a_i T^i b_j S^j$ حـ- $F = a_r T^r b_s S^S$

ب- $F = a_i b_j T^i S^j$ د- $F = a_r T^r b_r S^S$

الحل:

من المعطيات المثال نلاحظ أن:-

أ - المعادلة صحيحة وذلك بإستخدام الجمع الاصطلاحي.

ب- تكون هذه المعادلة صحيحة فقط إذا كان $b_j T^i = T^i b_j$.

حـ- هـذه العبارة صحيحة لأن i ، j متغيرات دمية ويمكن جعل $r \rightarrow i$ و $s \rightarrow j$ في الفقرة (أ).

د- المعادلة غير صحيحة وذلك لأنها لا تعطي نفس الناتج، كما أن الدليل r ظهر ثلاثة مرات في حد واحد وهذا غير محبذ، بل وغير صحيح هنا.

مثال (2.1)

إذا كان $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ و $(a^i) = (-1 , 0, 1)$

فأحسب الكميات التالية:-

أ - $a^i T_{ij}$ ب- $a^i a^j T_{ij}$

حـ- T_{ii} د- $a^j T_{2j}$

الحل:

أ - $a^i T_{ij} = a^1 T_{1j} + a^2 T_{2j} + a^3 T_{3j} = -1 (T_{1j}) + 0 (T_{2j}) + (T_{3j})$

وتعتمد القيمة على قيمة j، فمثلاً لو أن $j = 1$ فإن:

$$a^i T_{i1} = - T_{11} + T_{31} = -1 + 2 = 1$$

وبالمثل لو أن $j = 2$ فإن:

$$a^i T_{i2} = - T_{12} + T_{32} = - (-1) + (-1) = 0$$

كما أن

$$a^i T_{i3} = - T_{13} + T_{33} = -1 + 3 = 2$$

ب-
$$a^i a^j T_{ij} = a^i (a^1 T_{i1} + a^2 T_{i2} + a^3 T_{i3})$$
$$= (a^1 a^1 T_{11} + a^2 a^1 T_{21} + a^3 a^1 T_{31})$$
$$+ (a^1 a^2 T_{12} + a^2 a^2 T_{22} + a^3 a^2 T_{32})$$
$$(a^1 a^3 T_{13} + a^2 a^3 T_{23} + a^3 a^3 T_{33})$$
$$= (-1)(-1)\,1 + 0\,(-1)\,2 + 1\,(-1)\,2$$
$$+ ((-1)(0)(-1) + (0)(0)(0) + 1\,(0)(-1)$$
$$+ ((-1)(1)(1) + (0)(1)(1) + (1)(1)(3)).$$
$$= 1$$

حـ-
$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 1 + 0 + 3 = 4$$

د-
$$a^j T_{2j} = a^1 T_{21} + a^2 T_{23} + a^3 T_{23}$$
$$= (-1)(2) + (0)(0) + (1)(1) = -1$$

نعرف الآن دلتا كرونكر *(kronecker Delta)* δ^k_j على النحو:

$$\delta^k_j = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \qquad (12.1)$$

ومن تعريف δ^k_j نستنتج خواص مهمة مثلاً:

$$\delta^k_j A^j = \delta^k_1 A^1 + \delta^k_2 A^2 + \dots + \delta^k_k A^k + \dots + \delta^k_N A^N$$
$$= 0.\,A^1 + 0.A^2 + \dots + 1.\,A^k + \dots + 0.A^N$$
$$= A^k \qquad (13.1)$$

ومن استقلالية المنظومة x^i نرى أن:

$$\delta^k_j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} \qquad (14.1)$$

مثال (3.1):

أوضح بأن:

أ - $\delta^i_i = N$ ب- $\delta^i_j \delta^j_k = \delta^i_k$ حـ- $\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} = \delta^k_j$

الحل:

أ - $\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^N_N = 1 + 1 + \ldots + 1 = N$

ب- نفترض أن $i < k$ و $i \neq k$ عندئذ نجد أن:

$$\delta^i_j \delta^i_k = \delta^i_1 \delta^1_k + \delta^i_2 \delta^2_k + \ldots + \delta^i_i \delta^i_k + \ldots + \delta^i_k \delta^k_k + \ldots + \ldots + \delta^i_N \delta^N_k$$

$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots + 0 + \ldots + 0 = 0$$

ولو أن $i = k$ فإن:

$$\delta^i_j \delta^i_k = \delta^i_1 \delta^1_i + \ldots + \delta^i_i \delta^i_i + \ldots + \delta^i_N \delta^N_i$$

$$= 0 + 0 + \ldots + 1 + \ldots + 0 = 1$$

وهذا يعني أن:

$$\delta^i_j \delta^i_k = \delta^i_k$$

حـ- من (14.1) نحن نعلم بأن:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j$$

ولكن $x^k = x^k(\overline{x}^i)$ وبذلك لو استعملنا قاعدة السلسلة فإننا نحصل على المطلوب؛

أي أن:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} = \delta^k_j$$

مثال *(4.1)*

إذا كان

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

فأوضح بأن

$$T_{ij}\, a_i\, a_j = 0$$

(علماً بأن $a_i\, a_j = a_j\, a_i$)

الحل:

$$T_{ij}\, a_i\, a_j = -T_{ji}\, a_i\, a_j = -T_{ij}\, a_j\, a_i$$

وذلك لأن $T_{ij} = -T_{ji}$ و i و j متغيرات دمي ولكن $T_{ij}\, a_j\, a_i = T_{ij}\, a_i\, a_j$

وبذلك فإن:

$$T_{ij}\, a_i\, a_j = -T_{ij}\, a_i\, a_j$$

أي أن $2\,T_{ij}\, a_i\, a_j = 0$ ومنها نجد أن: $T_{ij}\, a_i\, a_j = 0$

مثال (5.1)

إذا كان $T_{ij} = - T_{ji}$ و $S_{ij} = S_{ji}$ فأوضح بأن: $T_{kl} S_{kl} = 0$

الحل:

$$T_{kl} S_{kl} = - T_{lk} S_{kl} = - T_{kl} S_{lk}$$

(وذلك من معطيات المسألة) ، ولأن l , k متغيرات دمي عليه فإن:

$$T_{lk} S_{lk} = T_{kl} S_{kl} \text{ ، } k \leftrightarrow l$$

وبذلك فإن:

$$T_{kl} S_{kl} = - T_{kl} S_{kl}$$

أي أن: $2 T_{kl} S_{kl} = 0$ ومنها نرى أن: $T_{kl} S_{kl} = 0$

6.1 المتجهات مخالفة التغاير والمتجهات موافقة التغاير

Contravariant and covariant vectors

قبل أن نعطي تعريفاً عاماً ودقيقاً للمتجهات مخالفة التغاير وتلك موافقة التغاير؛ دعنا نذكر بما يحدث عند تحويل الإحداثيات. نحن نعلم جيداً بأن متجه الموضع في الإحداثيات الكارتيزية وفي المستوى يعبر عنه بالمتجه $\underset{\sim}{r}$ وحيث $\underset{\sim}{r} = x^1\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$ ولو أننا قمنا بدوران للمحاور بزاوية θ فإننا نحصل على متجه الموضع $\bar{\underset{\sim}{r}}$ نسبة إلى المنظومة الجديدة من خلال العلاقة:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (15.1)$$

أي أن:

$$\bar{x}^1 = x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \qquad (16.1)$$

و

$$\bar{x}^2 = -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \qquad (17.1)$$

ومنها ترى أن:

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = \sin\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial x^{-2}}{\partial x^2} = \frac{\partial x^{-1}}{\partial x^1} = \cos\theta$$

وهكذا نحصل على:

$$\bar{x}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} x^2 \qquad (18.1)$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} x^2 \qquad (19.1)$$

هذا ونلاحظ أن:

$$(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$$

ومثل هذه التحويلات تسمى بالتحويلات المتعامدة.

الآن لو عممنا واعتبرنا أي متجه $\underset{\sim}{A}$ في الاحداثيات الكارتيزية وقمنا بدوران للمحاور فإننا نصل إلى علاقات مماثلة بين $\underset{\sim}{\bar{A}}$ و $\underset{\sim}{A}$ وهي:

$$\bar{A}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} A^2 \qquad (20.1)$$

$$\bar{A}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} A^2 \qquad (21.1)$$

هذا ونلاحظ أن $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i}$ تمثل هنا جيوب التمام الاتجاهية للمحور $\overline{ox}^i$ نسبة إلى المحور ox^i.

في ثلاثة أبعاد، وفي الإحداثيات الكارتيزية، يمكننا كتابة مركبات $\underset{\sim}{\bar{A}}$ في منظومة الإحداثيات الجديدة على النحو:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \qquad (22.1)$$

وكما نوهنا فإن $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ هي جيوب التمام الاتجاهية للمحور $\overline{ox}^i$ نسبة للمحور ox^j، وهي ما نرمز لها عادة بالمجموعة $\{l, m, n\}$.

الآن وبعد أن اعطينا هذه المقدمــة السـريعة عمّـا عهدنـاه عـن التحويـلات المتعامدة (دورانـات هنـا) نعطي التعريفـات العامـة التاليـة للمتجهـات مخالفـة وموافقة التغاير، إن مجموعة مـن N مـن الـدوال A^i في الإحداثيـات x^i تسـمى بمركبات متجه مخالف التغاير إذا تحولت تبعاً للمعادلات:

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} A^j \qquad (23.1)$$

وذلك عندما تحول من المنظومـة x^i إلى $\overline{x}^i$ ويفهـم مـن هـذا أن أي N مـن الدوال يمكن اختيارها كمركبات لمتجه مخالف التغاير في منظومة الإحداثيـات x^i ؛ والمعـادلات السـابقة *(23.1)* تحـدد المركبـات في المنظومـة الجديـدة $\overline{x}^i$ ، وترى من *(23.1)* أن :-

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} A^j \qquad (24.1)$$

ومن قاعدة السلسلة ترى أن $\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \frac{\partial x^{-i}}{\partial x^j} = \delta^k_j$

وبذلك فإن:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i = \delta^k_j A^j \qquad (25.1)$$

أي أن:

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i \qquad (26.1)$$

ومن العلاقات :-

$$d\,\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} d\,x^r$$

نلاحظ أن التفاضليات *(Differentials)* $d\,x^i$ تكون مركبات متجه مخالف التغاير ومركباته في أي منظومة أخرى هي $d\,\bar{x}^i$ ومباشرة ترى أن $\frac{d\,x^i}{d\,u}$ هو أيضاً متجه مخالف التغاير (وحيث u بارامتر) ويسمى بالمتجه المماس *(Trangent Vector)* المنحنى $x^i = x^i\,(u)$.

لنأخذ، الآن في الاعتبار تغير أخراً في الإحداثيات $(\bar{x}^i = g^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ عندئذ تكون المركبات الجديدة $\acute{A}^i$ معطاة على النحو:

$$\acute{A}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k \qquad (27.1)$$

وحيث استعملنا قاعدة السلسلة للوصول إلى *(27.1)* وهذه العلاقة الأخيرة تفيد بأن المركبات الجديدة هي أيضاً مركبات متجه مخالف التغاير وعليه نستنتج بأن تحويلات المتجهات مخالفة التغاير تكون زمرة *(Group)*.

مثال *(6.1)*

باستخدام منظومة الإحداثيات الكارتيزية في المستوى والإحداثيات القطبية، تحقق من أن متجه السرعة $\underset{\sim}{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ ليس بمتجه مخالف التغاير.

التحقيق :-

نلاحظ أن $x^1 = x$ و $x^2 = y$ ، $\bar{x}^1 = r$ و $\bar{x}^2 = \theta$ وكذلك $v^1 = \dot{x}$ و $v^2 = \dot{y}$ وعليه فإن:

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} v^2 = \frac{\partial r}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial r}{\partial y}\dot{y}$$

$$= \left(\frac{x}{r}\right)\dot{x} + \left(\frac{y}{r}\right)\dot{y} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r} = \dot{r} = \bar{v}^1$$

كذلك نجد أن:

$$\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} v^2 = \frac{\partial \theta}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\dot{y} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{x^2+y^2} = \dot{\theta} \neq r\,\dot{\theta} = \bar{v}^2$$

وهكذا نرى من النتيجة الأخيرة أن $\underset{\sim}{v}$ ليس بمتجه مخالف التغاير.

وللأهمية نلاحظ أن الدليل العلوي الواحد سوف نعني به دائماً متجهاً مخالف التغاير. وبذلك نرى أن الاحداثيات x^i تتصرف فقط كمركبات متجه مخالف التغاير إذا كانت التحويلة خطية، أي أنها من النوع:

$$\bar{x}^i = a^i_j\, x^j \qquad (28.1)$$

عندئذ

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j$$

ويكون

$$\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} . x^j$$

وفي الحـالة العـامة $A^i = X^i$ لا تمثـل مركبات متجه مخالف التغـاير، أي أن $\overline{A}^i \neq \overline{x}^i$ وإثبـات ذلـك نـورده من خـلال اعطـاء مثـال مضـاد *(Counter example)*.

لنعتبر أن منظومة الاحداثيات الكارتيزية المتعامدة هي المنظومـة المستخدمة $(x^2 = y\,,\, x^1 = x)$ وأن $\overline{x}^1 = r$ و $\overline{x}^2 = \theta$ هـي منظومـة الإحداثيـات الجديـدة (والتي تمثل منظومة الإحداثيات القطبية في المستوى) عندئذ نلاحظ أن:-

$$\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2}x^2 = \frac{\partial r}{\partial x}x + \frac{\partial r}{\partial y}y = \frac{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}{r} = \overline{x}^1$$

كما أن:

$$\frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2}x^2 = \frac{\partial \theta}{\partial x}x + \frac{\partial \theta}{\partial y}y$$

$$= \frac{-xy}{r^2} + \frac{xy}{r^2} = 0 \neq \theta = \overline{x}^2$$

وعليه من هذا المثال نرى أن في الحالة العامـة لا يمكـن الجـزم بـأن x^i تمثـل مركبات متجه مخالف التغاير لاحظ أن

$$\overline{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \text{و} \quad \overline{x}^2 = tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^1}\right)$$

وهي ليست من النوع *(28.1)*.

كمثال آخر لنأخذ المنظومة الأولى على أنها منظومة الإحداثيات الكارتيزية في ثلاثة أبعاد أي أن: $x^1 = x$ ، $x^2 = y$ و $x^3 = z$

والمنظـومة الجـديدة عـلى أنها منظومة الإحداثيات الأسطوانية $\bar{x}^1 = \rho$ ، $\bar{x}^2 = \phi$ ، $\bar{x}^3 = z$ ؛ عندئذ نرى أن:

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} x^3 = \frac{\partial \rho}{\partial x} x + \frac{\partial \rho}{\partial y} y + \frac{\partial \rho}{\partial z} z$$

$$= \frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho} + 0 = \rho = \bar{x}^1$$

وأن:-

$$\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} x^3 = \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z$$

$$= \frac{xy}{\rho^2} + \frac{xy}{\rho^2} + 0 = 0 \neq \phi = \bar{x}^3$$

كما أن:-

$$\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} x^3 = \frac{\partial z}{\partial x} x + \frac{\partial z}{\partial y} y + \frac{\partial z}{\partial z} z = z = \bar{x}^3$$

[نلاحظ مرة أخرى هنا أن :

$$\bar{x}^3 = x^3 \text{ و } \bar{x}^2 = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \text{ و } \bar{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

وهي ليست من النوع *(28.1)*].

ونلاحظ أنه لو كانت التحويلة هي تحويلة الوحـدة (أو التحويلـة المحـايدة) *(Identity Transformation)* فإن $\bar{x}^i = x^i$ وهذه تحقق كونها مركبـات متجـه

مخالف التغاير [في هذه الحالة $a^i_j = \delta^i_j$] وهكذا نؤكد مرة أخرى على أن $x^i = \bar{x}^i$ لا تكون مركبات متجه مخالف التغاير في الحالة العامة.

الآن بعد أن تعرضنا للحديث عن المتجهات مخالفة التغاير، نلتفت إلى النوع الثاني من التحويلات وتعطي التعريف التالي:

إن N من الدوال A_i في x^i تمثل مركبات متجه موافق التغاير *(Covariant)*؛ إذا تحولت طبقاً للمعادلات

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i} A_j \qquad (29.1)$$

عند تغير الإحداثيات من x^i إلى $\bar{x}^i$.

وبذلك فإنه يمكننا اختيار N من الدوال كمركبات في x^i والمعادلة *(29.1)* تعين المركبات في المنظومة الجديدة.

وبنفس الأسلوب السابق ترى أن:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{A}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} A_j = \delta^j_k A_j = A_k \qquad (30.1)$$

وحيث استخدمنا قاعدة السلسلة للتوصل إلى النتيجة

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} .$$

ونلاحظ أن:-

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \qquad (31.1)$$

وبذلك فإن $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ تمثل مركبات متجه موافق التغاير هذا المتجه يسمى بتدرج أو انحدار f وسوف نعتبر دائماً أن دليلاً تحتياً واحداً يمثل متجهاً موافق التغاير (A_i) ، مثلاً القوى المحافظة $\underset{\sim}{F}$ ، أي تلك التي يمكن اشتقاقها من دالة جهد V، تمثل متجهاً موافق التغاير [هنا تكون $\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{\nabla} V$ أي أن $\left\{F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}\right.$.

ملاحظة هامة:

عندما تكون لدينا تحويلة من النوع:

$$\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i \tag{32.1}$$

وحيث b^i ثوابت، ليست بالضرورة مركبات متجه مخالف التغاير، و a^i_m ثوابت تحقق $a^i_r a^i_m = \delta^r_m$ ، فإنه لا فرق بين المتجهات مخالفة وموافقة التغاير. وذلك نوضحه كما يلي:-

$$a^i_r \bar{x}^i = a^i_r [a^i_m x^m + b^i] = a^i_r a^i_m x^m + a^i_r b_i$$

$$= \delta^r_m x^m + a^i_r b^i = x^r + a^i_r b^i \tag{33.1}$$

ومنها نجد أن:-

$$x^r = a^i_r \bar{x}^i + c^r \tag{34.1}$$

حيث $c^r = - a^i_r b^i$

وهكذا نرى أن:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}=a^i_j=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \qquad (35.1)$$

أي أن المعادلة *(23.1)* والمعادلة *(28.1)* تقودان إلى نفس الشئ.

7.1 اللوازم (اللامتغيرات **Inrariants**)

أن أي دالة I في الإحداثيات x^i تسمى بكمية لازمة (أو لا متغير أو قياسي) نسبة إلى تحويلات الإحداثيات إذا حققت:-

$\bar{I} = I(36.1)$

وحيث $\bar{I}$ هي قيمة I في منظومة الإحداثيات الجديدة $\bar{x}^i$.

الآن بإستخدام مركبات المتجهات مخالفة التغاير A^i وتلك موافقة التغاير B_i نكون المجوع $A^i B_i$ ، في الإحداثيات الجديدة نرى أن:

$$\bar{A}^i\ \bar{B}_i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} B_k\right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A^j B_k = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} A^j B_k$$

$$= \delta^k_j\ A^j B_k = A^k B_k \qquad (37.1)$$

أي أن :

$$\bar{A}^i\ \bar{B}_i = A^i B_i \qquad (38.1)$$

وهذا يعني أن $A^i B_i$ كمية لازمة أو لا متغيرة. لا متغير آخر هو:-

$$\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + ... + \delta^N_N = N \qquad (39.1)$$

والذي يمثل بعد الفضاء V_N.

نلاحظ أيضاً أنه لو أخذنا $A^i = dx^i$ و $B_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ فإن:

$$A^i B_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i = df \qquad (40.1)$$

وهي كمية قياسية أولا متغير.

8.1 موترات من رتب عليا Tensors of Hihger order

نتقدم في دراستنا للموترات ونعطي تعريفاً للموترات من الرتبة الثانية ولكي نقوم بذلك نرى أنه:

لو كان لدينا N^2 من الكميات على النحو:

$A^{ij} = B^i C^j$ وحيث B^i و C^j هي مركبات متجهين مخالفي التغاير عندئذ ترى أن:

$$\overline{A}^{ij} = \overline{B}^i \, \overline{C}^i \, \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} = B^k C^l \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} = A^{kl} \qquad (41.1)$$

وبشكل عام لو كان لدينا N^2 من الدوال A^{ij} بحيث تتحول حسب المعادلة (41.1) فإننا نسمي A^{ij} بمركبات موتر مخالف التغاير من الرتبة الثانية، ولكن الآن ليس من الضروري أن يكون A^{ij} عبارة عن حاصل ضرب مركبات متجهين مخالفي التغاير.

نلاحظ أيضاً أنه إذا كان:

$$\overline{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A_{kl} \qquad (42.1)$$

فإننا نسمي $\overline{A}_{ij}$ بمركبات موتر موافق التغاير من الرتبة الثانية.

بينما لو كان لدينا التحويلة:

$$\overline{A}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A^k_l \qquad (43.1)$$

فإن $\overline{A}^i_j$ تمثل مركبات موتر مختلط (Mixed Tensor) من الرتبة الثانية. وهكذا نخلص إلى نتيجة مهمة وهي أنه:-

عندما نستعمل الأدلة علوياً فإننا نعني تخالف التغاير (Contravariance) وعندما نستعمل الأدلة سفلياً فإننا نعني توافق التغاير (Covariance).

فمثلاً الموتر المختلط A^i_j يتحول كمتجه مخالف التغاير نسبة إلى الدليل i ، ويتحول كمتجه موافق التغاير نسبة إلى j.

وكمثال على موتر مختلط من الرتبة الثانية نرى أن دلتا كرونكر δ^i_j تحقق التحويلة (43.1)، وذلك يتضح لنا إذا ما أخذنا $A^i_j = \delta^i_j$ ، عندئذ نجد أن:

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A^k_l = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \delta^k_l = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \overline{x}^j} = \overline{\delta}^i_j = \overline{A}^i_j \qquad (44.1)$$

بينما لو كتبنا دلتا كرونكر على النحو δ_{ij}فإنها لـن تكـون مركبـات موتـر مختلط وذلك لأن:

$$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^j}\ \delta_{lk}=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\neq\bar{\delta}_{ij} \qquad (45.1)$$

مثال **(7.1)**

إذا كـان A_{ij} موتـراً موافـق التغـاير مـن الرتبـة الثانيـة و B^i و C^j متجهـين مخالفي التغاير، فأوضح بأن $A_{ij}\,B^i\,C_j$ لا متغير.

الحل:

نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{ij}\ \bar{B}^i\ \bar{C}^j &= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\ A_{lk}\ \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S}B^S\ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}C^r\\
&=\left(\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}.\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S}\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}.\frac{\partial x^j}{\partial x^r}\right)A_{lk}\,B^s\,C^r\\
&=\left(\frac{\partial x^l}{\partial x^s}.\frac{\partial x^k}{\partial x^r}\right)A_{lk}\,B^s\,C^r\\
&=\delta^l_s\,\delta^k_r\,A_{lk}\,B^s\,C^r=A_{lk}\,B^l\,C^k\\
&=A_{ij}\,B^i\,C^j
\end{aligned}$$

وبذلك فإن $A_{ij}\,B^i\,C^j$ لا متغير [لاحظ أننا استعملنا قاعدة السلسلة عدة مرات وكذلك استقلالية الإحداثيات x^i للوصول إلى المطلوب].

ونعمم الآن إلى موترات من رتب عليّا أي من رتب أعلى من 2 ونعرف:

(إن مجموعة N^{S+P} من الدوال $A^{t_1\,\ldots\ldots t_S}_{q_1\,\ldots\ldots q_P}$ في الإحداثيات x^i تكون مكونة لمركبات موتر مختلط من الرتبة $s + p$ ، مخالفة التغاير من الرتبة s و موافقة التغاير من الرتبة P، إذا ما تحولت على النحو:

$$\overline{A}^{u_1 u_2 \ldots\ldots u_S}_{r_1 r_2 \ldots\ldots r_P} = \frac{\partial \overline{x}^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots\cdots \frac{\partial \overline{x}^{u_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \overline{x}^{r_1}} \cdots\cdots \frac{\partial x^{q_P}}{\partial \overline{x}^{r_P}} A^{t_1 \ldots\ldots t_S}_{q_1 \ldots\ldots q_P} \qquad (46.1)$$

إذا ما تغيرت الإحداثيات من x^i إلى $\overline{x}^i$).

من المهم ملاحظة أن ترتيب الأدلة مهم في الموترات فمثلاً A^{ij} لا يعني بالضرورة A^{ji} (في المصفوفات A^{ji} هي محورة A^{ij}) وإذا ما بقي موتر دون تغير بإستبدال أي دليلين فإن الموتر يكون متماثلاً (Symmetric) نسبة إلى تلك الأدلة، ولو حدث ذلك فإن الموتر يبقى متماثلاً حتى في الإحداثيات الجديدة، وهذا نوضحه كما يلي:-

$$\overline{A}^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} A^{lk} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} A^{kl}$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l} A^{kl} = \overline{A}^{ji} \qquad (47.1)$$

وللأهمية نلاحظ أن التماثل لا يعرف لدليلين أحدهما سفلي والآخر علوي؛ ذلك لأن التماثل في هذه الحالة ربما لا يبقى بعد تغير الإحداثيات.

وهكذا فإن الموتر المتماثل هو ذلك الذي لا يتغير بإستبدال أي دليلين من نفس نوع التغاير.

ومن الواضح أيضاً أن موترا متماثلاً من الرتبة الثانية لـه $\frac{1}{2}N\ (N+1)$ من المركبات المختلفة على الأكثر.

والموتر ملتوي التماثل (Skew - Symmetric) نسبة إلى دليلين من نفس النوع هو ذلك الذي تتغير إشارة مركباته (وليست المقادير) عندما يتم استبدال الدليلين بعضهما ببعض، كما أنه يكون ملتوي التماثل إذا ما غيرت المركبات اشارتها عند استبدال أي دليلين من نفس النوع وفي هذه الحالة يكون عدد المركبات المختلفة هو $\frac{1}{2}N\ (N-1)$ عندما يكون الموتر من الرتبة الثانية [لاحظ أن المركبات القطرية في هذه الحالة كلها تساوي أصفاراً].

من خلال علاقات التحويل ذات العلاقة بتعريف الموترات من أي نوع نلاحظ ما يلي:

أ – إذا كانت مركبات موتر في منظومة إحداثيات ما تساوي الصفر عند نقطة معينة فإنها جميعاً تساوي الصفر عند تلك النقطة لكل منظومة إحداثيات أخرى.

ب– إذا كانت مركبات موتر تساوي الصفر في منظومة ما فإنها تساوي الصفر في أي منظومة أخرى، أي عند كل النقاط. والخاصية هذه هي التي توضح أهمية الموترات في التطبيقات الفيزيائية وهو أمر سوف نقوم بتوضيحه من خلال الفصل الأخير الذي ستعرض فيه بعض التطبيقات المهمة للموترات.

حـ- عندما يعرف موتر عند كل النقاط أو خلال الفضـاء V_N فإننـا نقـول بأن الموتر يكون مجال موتريا (Tensor Field).

9.1 الأزواج (Dyadics)

كميات أخرى ذات أهمية هي الأزواج وهي ذات علاقـة بـالموترات. فلـو أخذنـا علـى سـبيل المثـال الإحداثيـات الكارتيزيـة المتعـامدة V_3 وربطنـا بـين وحدتي المتجه $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ مكونين التركيبه $\hat{e}_1 \hat{e}_2$ [وهي غير $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ أو $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$].

فإننا نحصل على ما نسميه بالزوج وحيث يحقق هذا الزوج قواعد الضـرب التالية:

أ - الضرب من اليمين على النحو:

$$\vec{A}.\hat{e}_1 \hat{e}_2 = (\vec{A}.\hat{e}_1)\hat{e}_2 = A^1 \hat{e}_2 \qquad (48.1)$$

ب- الضرب من اليسار على النحو:

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 . \vec{A} = \hat{e}_1 (\hat{e}_2 . \vec{A}) = \hat{e}_1 A^2 \qquad (49.1)$$

ويمكننا الحديث عن الزوج $\overleftrightarrow{D}$ في الحالة العامة على أنـه ذلـك المكـون مـن المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وحيث:-

$$\overleftrightarrow{D} = \vec{B}\,\vec{A} = (\hat{e}_i B^i)(\hat{e}_j A^j)$$

$$= \hat{e}_i \hat{e}_j B^i A^j \qquad (50.1)$$

وهكذا فإن:

$$\hat{e}_l . \overleftrightarrow{D} = B^l \vec{A} \;,\; \overleftrightarrow{D}.\hat{e}_k = e_i B^i A^k = \vec{B} A^k$$

وعموماً نلاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون $\vec{A}.\overleftrightarrow{D}=\overleftrightarrow{D}.\vec{A}$ ولو أفترضنا أن $\hat{e}.\overleftrightarrow{D}=\overleftrightarrow{D}.\hat{e}$ واخترنا $\hat{e}=\hat{e}_1$ فإن ذلك يعني أن $A^iB^j=A^jB^i$ وهذا يعني أن $\frac{A^i}{A^j}=\frac{B^i}{B^j}$. أي أن المتجهين متناسبان $\{\vec{A}= C\vec{B}$ ؛ C ثابت$\}$. والأزواج المتماثلة يمكن جعلها قطرية؛ أي أنه يمكن كتابتها على النحو:

$$\overleftrightarrow{T}= \hat{e}_1\hat{e}_1 T^{11} + \hat{e}_2\hat{e}_2 T^{22} + \hat{e}_3\hat{e}_3 T^{33} \qquad (51.1)$$

وتكمن هنا الفائدة الجمة للأزواج في الفيزياء، حيث أنه توجد عدة مركبات يمكن تمثيلها بأزواج، وهذه متماثلة وجعلها قطرية يفيد في تسهيل الحسابات. فمثلاً يمكن التعبير عن مجموعة عزوم القصور ذاتية ومضروبات القصور في شكل موتر أو في شكل زوج $\overleftrightarrow{I}$، وعندئذ نكتب طاقة الحركة على الصورة:

$$T=\frac{1}{2}\,\vec{\omega}.\,\overleftrightarrow{I}\,.\,\vec{\omega} \qquad (52.1)$$

وحيث $\vec{\omega}$ هو متجه السرعة الزاوية للجسم.

نلاحظ أن $\overleftrightarrow{i}= \hat{e}_1\hat{e}_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3$ هو زوج من نوع خاص ويسمى بوحدة الزوج.

مثال (8.1)

عند دراسة تفاعل الجزئيات ينشأ الزوج من وحدة المتجهات على الشكل:

$$\overleftrightarrow{U}= \overleftrightarrow{i} - 3\,\hat{e}\hat{e}$$

وحيث $\hat{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ [$\vec{r}$ هي الإزاحة النسبية بين الموضعين 1 و 2] ؛ بيّن أن أثر $\overleftrightarrow{U} . \overleftrightarrow{U}$ أو $T_r(\overleftrightarrow{U} . \overleftrightarrow{U}) = 6$.

الحل:

حيث أن:

$$\overleftrightarrow{U} . \overleftrightarrow{U} = \overleftrightarrow{i} . \overleftrightarrow{i} - 3\overleftrightarrow{i} . \hat{e}\hat{e} - 3\,\hat{e}\hat{e} . \overleftrightarrow{i} + 9(\hat{e}\hat{e}).(\hat{e}\hat{e})$$

وحيث أن $\overleftrightarrow{i} . \overleftrightarrow{i} = \overleftrightarrow{i}\ ,\ \overleftrightarrow{i} . \hat{e} = \hat{e} . \overleftrightarrow{i} = \hat{e}\ ,\ \hat{e}.\hat{e} = 1$

عليه فإن: $\overleftrightarrow{U} . \overleftrightarrow{U} = \overleftrightarrow{i} + 3\,\hat{e}\hat{e}$

ومنها نرى أن:

$$T_r(\overleftrightarrow{U} . \overleftrightarrow{U}) = T_r(\overleftrightarrow{i}) + 3\,\frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^2} = 3 + 3 = 6$$

تمارين (1)

1- لو أن $\bar{x}^1 = r$ و $\bar{x}^2 = \theta$ و $\bar{x}^3 = \phi$ ، استخدم منظومة الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة للتحقق من ما إذا كان x^i تمثل مركبات متجه مخالف التغاير.

2- احسب متجه السرعة في الإحداثيات الاسطوانية وفي الإحداثيات الكروية؟ ماذا تلاحظ عن طبيعتها المتجهية التحولية.

3- ما هي العجلة في الاحداثيات الكروية؟ هل تمثل مركباتها مركبات متجه مخالف التغاير؟

4- إذا كان $A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $[a_i] = (-1,1,-1)$

فأحسب: أ- $a_i A_{ij}$ ب- $A_{ij} A_{ij}$ حـ- $a_j A_{ij}$

5- إذا كان A_{ij} موتراً ملتوي التماثل فأثبت أن:-

$$\left(\delta^i_j \delta^K_l + \delta^i_l \delta^k_j\right) A_{ik} = 0$$

6- لو أن

$$T_{ij} = 2\,\mu\, E_{ij} + \lambda\,(E_{kk})\,\delta_{ij}$$

فأوضح بأن:

أ - $$w = \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} = \mu\, E_{ij} E_{ij} + \frac{\lambda}{2} (E_{kk})^2$$

ب- $$P = T_{ij} T_{ij} = 4\,\mu^2 E_{ij} E_{ij} + (E_{kk})^2 (4\,\mu\,\lambda + 3\,\lambda^2)$$

7- لو أن $(a_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $(b_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

و $[S_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ فأحسب

أ - $T_{ij} = \in_{ijk} a_k$

ب- $C_i = \in_{ijk} a_{kj} b_k$

حـ- $d_i = \in_{ijk} S_{jk}$

علماً بأن

$$\in_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كان } (ijk) \text{ تبدلية زوجية} \\ 0 & \text{إذا تساوي أي دليلين} \\ -1 & \text{إذا كان } (ijk) \text{ تبدلية فردية} \end{cases}$$

8- ليكن $T_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji})$ و $R_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji})$ ، أوضح بأن

$S_{ij} = T_{ij} + R_{ij}$ وأن $T_{ij} = T_{ji}$ و $R_{ij} = R_{ji}$

9- اثبت أن موتراً متماثلاً من الرتبة الثانية له $\frac{1}{2}N\ (N+1)$ من المركبات المختلفة على الأكثر.

10- اثبت أن $\overleftrightarrow{i} = \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \hat{e}_3$

هو العنصر المحايد لمجموعة الأزواج.

11- إذا كان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهين فأحسب:

أ- $\vec{A}\,.\,\vec{A}\,\vec{B}$ ب- $\vec{A}\,\vec{B}\,.\,\vec{B}$ حـ- $\vec{A}\,.\,\vec{A}\,\vec{B}\,.\,\vec{B}$

الفصل الثاني

جبر الموترات *Algebra of Tensors*

1.2 تقديم.

2.2 جمع وطرح الموترات.

3.2 ضرب الموترات.

أ – الضرب الخارجي.

ب– الضرب الداخلي.

4.2 قانون القسمة.

5.2 رموز التباديل

6.2 الموترات الزائفة.

1.2 تقديـم

من ضمن اهتمامات علم الجبر استحداث طرق للتعامل مع الكميات الجديدة الناتجة من مسائل تنسيقية *(coordnation)* حتى يتم تطوير النظرية الخاصة بتلك الكميات الجديدة كما هو الحال في خواص جبر الموترات الناتج من دراسة الفضاء المتجهي الخطي ذي بعد محدود. عليه فإننا سنقوم في هذا الفصل بدراسة جبر الموترات.

كما سبق وأن تعرضنا بالفصل السابق إلى أن الموترات هي كميات رياضية يتم تحويلها من مناط اسناد إلى مناط اسناد آخر حسب تحويلات معينة، مثلاً للموتر المختلط B^i_j نرى أن التحويلة هي:-

$$\overline{B}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} \; B^l_k \qquad (1.2)$$

و $\overline{B}^i_j$ هو موتر مختلط من الرتبة الثانية مخالف التغاير في i وموافق التغاير في j .

دعنا الآن نبدأ بتعريف الجمع والطرح للموترات.

2.2 جمع وطرح الموترات:

إذا كان لدينا الموتر $A^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_p}$ والموتر $B^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_p}$ حيث A و B ولهما نفس الرتبة وكذلك نفس رتب تخالف وتوافق التغاير (أو نفس عدد مركبات تخالف وتوافق التغاير)، في هذه الحالة يمكن جمع أو طرح A و B وبذلك نحصل على موتر جديد له نفس رتبة A أو B.

$$C^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_p} = A^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_p} \pm B^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_p} \qquad (2.2)$$

وهكذا شرط جمع أو طرح الموترات هو أن تكون من نفس الرتبة سواء في تخالف أو توافق التغاير .

مثال *(1.2)*:

هل يمكننا جمع الموتر A^{ij} مع الوتر B^i_j ؟

الحل:

رغم إن الموتر A و B لهما نفس الرتبة غير أنهما يختلفان في رتبة تخالف وتوافق التغاير، حيث أن الأول A هو موتر من الرتبة الثانية في تخالف التغاير والثاني B هو موتر من الرتبة الأولى في تخالف التغاير ومن الرتبة الأول في توافق التغاير، وبذلك فإنه لايمكن جمع A و B لعدم اتفاقه مع التعريف *(2.2)*.

مثال **2.2**:

كون علاقة بين الموتر A^{lmn}_{kj} و B^{lmn}_{kj} وما هوالشرط اللازم لعمل ذلك؟

الحل:

بما أن الموتر A و B هما من نفس النوع (كل منهما من الرتبة الثالثة في تخالف التغاير ومن الرتبة الثانية في توافق التغاير)، إذاً نستطيع تكوين علاقة خطية بينهما على النحو:

$$D^{lmn}_{kj} = \alpha A^{lmn}_{ki} + \beta B^{lmn}_{kj} \qquad (3.2)$$

شريطة أن تكون α و β كميات لازمة *(Invariant)*.

3.2 ضرب الموترات

أ – الضرب الخارجي *(outer Product)*

إذا كان لدينا الموتران $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ و $B^{k_1 k_2 \ldots k_n}_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ وهما موتران ليسا بالضرورة من نفس الرتبة، عندئذ يعرف حاصل ضرب A و B الخارجي على أنه موتر جديد رتبته تساوي حاصل جمع رتبة A ورتبة B وتكتب على الصورة:–

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_s \; k_1 k_s \ldots k_n}_{j_1 j_2 \ldots j_p \; l_1 l_2 \ldots l_r} = A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} \quad B^{k_1 k_2 \ldots k_s}_{l_1 l_2 \ldots l_p} \qquad (4.2)$$

فمثلاً لو كان لدينا الموتر A^{km}_n والموتر B^l_i فإن حاصل ضربهما الخارجي هو:

$$C^{kml}_{ni} = A^{km}_n \; B^l_i$$

ونلاحظ أن الموتر الأول A هو من الرتبة الثالثة بينما B من الرتبة الثانية وبذلك فإن C هو موتر من الرتبة الخامسة.

ب– الضرب الداخلي *(Inner Multiplication)*

قبل أن نتحدث عن تكوين موترات بإستخدام الضرب الداخلي نتعرف:

أولاً: إلى عملية التقليص *(Contraction)* أو الإنقباض.

ويعرف التقليص بأنه تلك العملية التي يتم تقليص رتبة أي موتر مختلط بمقدار اثنان وذلك بالجمع على دليل واحد علوي وآخر سفلي. فمثلاً لو كان لدينا الموتر المختلط من الرتبة الرابعة A^{lk}_{jn} فإنه وحسب تعريف الموترات نجد أن:

$$\overline{A}^{lk}_{jn} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^m} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} A^{mi}_{sr} \qquad (5.2)$$

الآن لو وضعنا $k = j$ مثلاً وقمنا بالجمع على هذا الدليل فإننا نحصل على:

$$\overline{A}^{lk}_{kn} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^m} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} A^{mi}_{sr} \qquad (6.2)$$

وبإستخدام قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^s}{\partial x^i} = \delta^s_i \qquad (7.2)$$

بالتعويض في المعادلة (5.2) نحصل على:

$$\overline{A}^{lk}_{jn} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} \delta^s_i A^{mi}_{sr} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} A^{mi}_{ir} \qquad (8.2)$$

وبذلك نرى أن A^{lk}_{kn} هو موتر مختلط من الرتبة الثانية، أي أنه بالجمع على دليلين أحدهما علوي والآخر سفلي تقصلت رتبة الموتر بمقدار اثنين وعموماً تقودنا هذه العملية إلى الحصول على موتر من الرتبة r -2 حيث كان موترا مختلطاً رتبنة r. نلاحظ أيضاً أنه لموتر مثل A^{ij}_{lmn} وباستخدام تقليصين A^{ij}_{lij} نحصل على متجه موافق التغاير وباستعمال عملية التقليص للموتر السابق يمكننا تكوين الموترات التالية:

A^{ij}_{lij} ، A^{ij}_{lji} ، A^{ij}_{lin} ، A^{ij}_{imn} ، A^{ij}_{ljn} ، A^{ij}_{lmj} ، A^{ij}_{jmi} ، A^{ij}_{ijn} ونؤكد مرة أخرى أن الجمع في عملية التقليص يتم على دليلين أحدهما علوي والأخر سفلي. وهذا يعني أنه لا يمكن القيام بعملية التقليص على دليلين من نفس النوع، وذلك لأن الناتج لا يمكن بالضرورة موتراً.

مثال *(3.2)*

طبق عملية التقليص على الموتر المختلط A_j^i؟ ماذا يكون الناتج؟ عند تطبيق عملية التقليص على A_j^i نحصل على A_i^i وحيث أن A_j^i موتر من الرتبة الثانية فإن A_i^i هو موتر من الرتبة الصفرية أي أن A_i^i هو كمية لازمة أو لا متغير.

الآن بعد أن قدمنا تعريفاً لعملية التقليص، نعود لنذكر بأنه يمكن الربط بين عملية الضرب الخارجي بالفقرة السابقة (التقليص) لتكوين موترات.

فإذا كان لدينا موتران مختلطان A_k^{ij} و B_{mnt}^k فإننا باستخدام الضرب الخارجي وعملية التقليص نكون الموتر:

$$C_{mnt}^{ij} = A_k^{ij} \; B_{mnl}^k \qquad (9.2)$$

وهو موتر من الرتبة الخامسة، وحيث ترى أن عملية التقليص قلصت من الرتبة بمقدار 2 عنها في عملية الضرب الخارجي العادية وعملية التقليص كان هنا على الدليل k.

وبهذه الطريقة يمكن اختزال رتبة الموترات المضروبة والموتر الناتج وتسمى بحاصل الضرب الداخلي *(Inner Product)*.

4.2 قانون القسمة *(Quotient law)*

لتحديد ما إذا كانت مجموعة من الدوال تمثل مركبات موتر يمكن القول بأن الطريقة المباشرة للاختبار ليست بالسهلة ولذلك فإننا نستخدم القانون الموالي وهو ما نسميه بقانون القسمة والذي ينص على ما يلي:

(إن N^P من الـدوال x^i تكـون مركبـات موتـر رتبتـه P، ذي صيغـة مخالفـة وموافقة التغاير، إذا ما كان حاصل الضرب الداخلي لهذه الدوال مع أي موتر اختياري موتراً أيضاً).

وهذا يعني أن هذا القانون هو اختبار بسيط يوضـح مـا إذا كـانت كمية معطاة تسلك سلوك الموترات أم لا، ولتوضيح كيفيـة العمـل بقـانون القسـمة دعنا نعطي المثال التالي: [ملاحظة: القسمة بالمفهوم العادي غير معرفة هنا].

مثال *(4.2)*

إذا ما اعطيت الكميات A^{ijk} استخدام قـانون القسـمة لاثبـات الحالـة الـتي تكون فيها هذه الكميات مركبات موتر.

الحل:

ليكن B^P_{ij} موتراً مختلطاً اختيارياً عندئذ:

$$\overline{B}^P_{ij} = \frac{\partial \overline{x}^P}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j} B^r_{st} \qquad (10.2)$$

الآن نقوم بضرب B^P_{ij} مع A^{ijk} ضرباً داخلياً فتكون النتيجة C^{kP} وحيث:

$$C^{kP} = A^{ijk} \; B^P_{ij} \qquad (11.2)$$

الآن نثبت أنه إذا كان حاصل الضرب C^{kP} موتـر فـإن A^{ijk} تكـون موتـراً أيضاً هذا نبينه كما يلي:

$$\overline{C}^{kp} = C^{lm} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^P}{\partial x^m} \qquad (12.2)$$

كما أنه من المعادلة (11.2) نرى أن:

$$\overline{C}^{kp} = \overline{A}^{ijk} \ \overline{B}^{P}_{ij} \qquad (13.2)$$

من المعادلة (13.2) والمعادلة (10.2) نحصل على:-

$$\overline{C}^{kp} = \overline{A}^{ijk} \ B^{r}_{st} \frac{\partial \overline{x}^{P}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{j}} \qquad (14.2)$$

وبالتعويض عن $\overline{C}^{kp}$ بالمعادلة (12.2) في المعادلة (14.2) نجد أن:

$$\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{l}} \frac{\partial \overline{x}^{P}}{\partial x^{m}} C^{lm} = \overline{A}^{ij} \frac{\partial \overline{x}^{P}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{i}} B^{r}_{st} \qquad (15.2)$$

ولكن $C^{lm} = A^{stl} \ B^{r}_{st}$ ، بذلك فإن:

$$\frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{l}} \frac{\partial \overline{x}^{P}}{\partial x^{m}} A^{Stl} \ B^{m}_{st} = \overline{A}^{ijk} \ B^{r}_{st} \frac{\partial \overline{x}^{P}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{j}} \qquad (16.2)$$

الآن بضرب هذه المعادلة في $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{P}}$ والجمع على P واستخدام قاعدة السلسلة نحصل على:

$$\delta^{\alpha}_{m} \left\{ \overline{A}^{ijk} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{i}} - \frac{\partial \overline{x}^{k}}{x^{l}} A^{stl} \right\} B^{\alpha}_{st} = 0 \qquad (17.2)$$

أو أن:

$$\left[\overline{A}^{ijk} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \overline{x}^{i}} - \frac{\partial \overline{x}^{k}}{x^{l}} A^{stl} \right] B^{r}_{st} = 0 \qquad (18.2)$$

وحيث أن B_{st}^{α} هو موتر اختياري فإنه يمكن اختياره بحيث أن مركبة واحدة B_{st}^{α} لاتساوي الصفر في كل مرة ونعيد ذلك كما يحلو لنا وبذلك نحصل على:

$$\overline{A}^{ijk}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}-\frac{\partial \overline{x}^k}{x^m}A^{stm}=0 \tag{19.2}$$

الآن بضرب هذه المعادلة الأخيرة في $\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^t}$ و $\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}$ والجمع على t و s واستخدام قاعدة السلسلة مرتين نحصل على:

$$\overline{A}^{rqk}=\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^t}\frac{\partial \overline{x}^k}{x^m}A^{stm} \tag{20.2}$$

وهكذا توصلنا إلى أن الكميات A^{stm} هي مركبات موتر من الرتبة الثالثة: [لاحظ أن هذا المثال يمكن اعتباره كبرهان خاص لقانون القسمة].

5.2 رموز التباديل (Permutation Symbols)

قبل أن نخوض في موضوع الموترات الزائفة لابد لنا من دراسة مستفيضة لكميات مهمة نسميها برموز التباديل.

رموز التباديل $\in_{ijk}$ *(Permutation symbols)* حيث $\in_{ijk}$ هو موتر من الرتبة الثالثة كما سترى من الفقرات والبنود التالية، أدلة هذا الرمز هي $(i\ j\ k)$ وتأخذ القيم $1,2,3$ كما يعرف $\in_{ijk}$ على النحو التالي:

$$\in_{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{إذا كانت الأدلة لها تبديل زوجي}\\ -1 & \text{إذا كانت الأدلة لها تبديل فردي}\\ 0 & \text{إذا كان اثنان أو أكثر من الأدلة متساوية}\end{cases} \tag{21.2}$$

من هنا نستطيع كتابة كل الاحتمالات الممكنة للقيم غير الصفرية لهذا الرمز وهي:

$$\in_{ijk}=-\in_{ikj}=\in_{kij}=-\in_{kji}=\in_{jki}=-\in_{jik} \qquad (22.2)$$

وهي ستة احتمالات (لتغير مواضع الأدلة).

ونستطيع الاستفادة من هذا الرمز في ايجاد حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهات فلو أخذنا $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ التي تمثل وحدات متجه في اتجاه المحاور الثلاثة ox, oy, oz على التوالي وحيث أن:

$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_3\} \qquad (23.2)$$

فإنه يمكن كتابة المعادلة (23.2) على الصورة:

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \in_{121} \hat{e}_1 + \in_{122} \hat{e}_2 + \in_{123} \hat{e}_3 \qquad (24.2)$$

ذلك لأن $\in_{121} = \in_{122} = 0$ و $\in_{123} = 1$.

كذلك نستطيع ايجاد حاصل ضرب كل من $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3$ و $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ بنفس الطريقة السابقة وبذلك يمكننا وضع حاصل الضرب هذا في صورة عامة على النحو التالي:

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \in_{ijk} \hat{e}_k \qquad (25.2)$$

$\in_{ijk}$ تساوي صفراً عدا الحالة $i \neq j \neq k$.

مثال (5.2)

أوجد حاصل ضرب المتجهين $\vec{A} \wedge \vec{B}$ بإستخدام الكميات ϵ_{ijk}.

الحل:

يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$ على الصورة:

$$\vec{A} = A_i \; \hat{e}_i \qquad (26.2)$$

وكذلك المتجه $\vec{B}$ يمكن كتابته على النحو:

$$\vec{B} = B_j \; \hat{e}_j \qquad (27.2)$$

وعليه فإن

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_i B_j \; \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j \qquad (28.2)$$

ومن المعادلة *(25.2)* يمكن كتابة المعادلة *(28.2)* على الشكل:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_i B_j \; \epsilon_{ijk} \, \hat{e}_k \qquad (29.2)$$

أو على الشكل:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \epsilon_{ijk} \; A_i B_j \; \hat{e}_k \qquad (30.2)$$

بتحليل المعادلة *(30.2)* نحصل على ستة حدود فقط لا تساوي صفراً ؛ وهذا ناتج عن تعريف ϵ_{ijk} والحدود الستة هي:-

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \epsilon_{123} A_1 B_2 \; \hat{e}_3 + \epsilon_{132} A_1 B_3 \; \hat{e}_2 + \epsilon_{312} A_3 B_1 \; \hat{e}_2$$
$$+ \epsilon_{312} A_3 B_2 \; \hat{e}_1 + \epsilon_{231} A_2 B_3 \; \hat{e}_1 + \epsilon_{213} A_2 B_1 \; \hat{e}_3$$
$$(31.2)$$

ونلاحظ أن $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{231} = 1$ كما أن $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$ وذلك انطلاقاً من تعريف ϵ_{ijk} [لاحظ تغير مواضع الأدلة وما يحدث نتجة لذلك من تغير في الإشارة]. عليه فإن المعادلة (31.2) يمكن وضعها على الصورة التالية:-

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2)\,\hat{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\,\hat{e}_2$$

$$+ (A_1 B_2 - A_2 B_1)\,\hat{e}_3 \qquad (32.2)$$

وهذه هي النتيجة المتوقعة والمعروفة لدى الطالب.

مثال (6.2)

اثبت العلاقة الآتية $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ ؟

الحل:

بفك المقدار السابق نحصل على ستة حدود فقط لا تساوي صفراً وهي:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}\epsilon_{ikj} + \epsilon_{kij}\epsilon_{kij}$$

$$+ \epsilon_{kji}\epsilon_{kji} + \epsilon_{jki}\epsilon_{jki} + \epsilon_{jik}\epsilon_{ijk}$$

[نلاحظ أن كل ijk مختلفة عن بعضها] الآن بالتعويض عن قيم ϵ_{ijk} نحصل على:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = (+1)(+1) + (-1)(-1) + (+1)(+1) + (-1)(-1)$$

$$+ (+1)(+1) + (-1)(-1)$$

ومنها نحصل على:

$$\in_{ijk} \in_{ijk} = 6$$

مثال (7.2):

اثبت العلاقة التالية:

$$\in_{mjk} \in_{njk} = 2\, \delta_{mn}$$

الحل:

حيث

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

فإنه عند حساب مفكوك المقدار $\in_{mjk} \in_{njk}$ للحالة $m \neq n$ ستكون قيم كل الحدود تساوي الصفر وذلك راجع إلى أن كل الحدود في هذه الحالة تحوي أدلة متشابهة، لكن في الحالة $m = n$ مثلاً $m = n = 1$ فإنه يوجد حدان فقط لا يساويان الصفر (وهي $jk = 23$ و $jk = 32$) ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\in_{ijk} \in_{ijk} = \in_{123} \in_{123} + \in_{132} \in_{132} = 2$$

إذا بكتابة النتيجة السابقة في صورة عامة نحصل على المطلوب وهو:

$$\in_{mjk} \in_{njk} = 2\, \delta_{mn}$$

(لاحظ أن δ_{mn} ليس بالضرورة موتراً)

مثال *(8.2)*:

أثبت العلاقة التالية

$$\epsilon_{mnk}\epsilon_{ijk} = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{nI}$$

الحل:

المقدار $\epsilon_{mnk}\epsilon_{ijk}$ لا يساوي صفراً فقط في حالتين وهما الحالة $(n = j , m = i)$ والحالة $(n = i , m = j)$ أما باقي الحدود فتساوي صفراً؛ ويرجع السبب في ذلك إلى أنها تحوي أدلة متشابهة وبذلك يصبح مفكوك المقدار السابق على الصورة:

$$\epsilon_{mnk}\epsilon_{ijk} = \delta_{mi}\delta_{nj}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} + \delta_{mj}\delta_{ni}\epsilon_{jik}\epsilon_{ijk}$$

وبما أن $\epsilon_{ijk} = +1$, $\epsilon_{jik} = -1$ فإنه يمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي:

$$\epsilon_{mnk}\epsilon_{ijk} = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}$$

وهو المطلوب.

مثال *(9.2)*:

أثبت صحة المتطابقة الاتجاهية الآتية:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}$$

الحل:

حيث أن:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = A_i\ \hat{e}_i . \wedge (B_j\ \hat{e}_j \wedge C_l\ \hat{e}_l)$$

وبإستخدام العلاقة (25.2) يمكننا كتابة المعادلة الأخيرة على الصورة:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = \epsilon_{jlk}\, A_i\, B_j\, C_l\ \hat{e}_i \wedge \hat{e}_k$$

مرة أخرى نستخدم العلاقة (25.2) لنحصل على:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = \epsilon_{jlk}\epsilon_{ikn}\, A_i\, B_j\, C_l\ \hat{e}_n$$

وحيث أن $\epsilon_{jlk}\,\epsilon_{jkn} = -\,\epsilon_{jlk}\,\epsilon_{ink}$

باستعمال نتائج المثال السابق نحصل على

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = -\ (\delta_{ji}\,\delta_{ln} - \delta_{jn}\,\delta_{li})\, A_i\, B_j\, C_l\ \hat{e}_n$$

وبفك هذا المقدار للدليل n أولاً ثم الدليل l ثانياً نجد أن:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = A_l\, B_j\, C_l\ \hat{e}_j - A_i\, B_i\, C_l\ \hat{e}_l$$

$$= (A_l\, C_l)\,(B_j\ \hat{e}_j) - (A_i\, B_i)\,(C_l\ \hat{e}_l)$$

ولكن $\vec{A}\ .\ \vec{B} = A_i\, B_i$ و $\vec{A}\ .\ \vec{C} = A_l\ C_l$ وبذلك فإننا نصل إلى النتيجة المطلوبة وهي:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\ .\ \vec{C})\ \vec{B} - (\vec{A}\ .\ \vec{B})\ \vec{C}$$

مثال (10.2)

اوجد قيمة $\in_{ijk}\in_{pqr}$؟

الحل:

هناك ستة احتمالات فقط للمقدار $\in_{ijk}\in_{Pqr}$ لا تساوي الصفر:

الأول عندما $i = P$ و $j = q$ و $k = r$

الثاني عندما $i = q$ و $j = r$ و $k = P$

الثالث عندما $i = r$ و $j = P$ و $k = q$

الرابع عندما $i = P$ و $j = r$ و $k = q$

الخامس عندما $i = q$ و $j = P$ و $k = r$

السادس عندما $i = r$ و $j = q$ و $k = P$

عليه إذا قمنا بفك المقدار المذكور فإننا نحصل على:-

$$\begin{aligned}\in_{ijk}\in_{Pqr} &= \delta_{iP}\delta_{jq}\delta_{kr}\in_{ijk}\in_{ijk} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kP}\in_{ijk}\in_{ikj}\\ &+ \delta_{ir}\delta_{jP}\delta_{kq}\in_{ijk}\in_{jik} + \delta_{iP}\delta_{jr}\delta_{kq}\in_{ijk}\in_{kij}\\ &+ \delta_{iq}\delta_{jP}\delta_{kr}\in_{ijk}\in_{jki} + \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kP}\in_{ijk}\in_{kji}\end{aligned}$$

ولكن نحن نعلم بأن

$\in_{ijk} = \in_{jki} = \in_{kij} = 1$ و $\in_{ikj} = \in_{jik} = \in_{kji} = -1$

وعليه فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}\in_{ijk}\in_{Pqr} &= \delta_{iP}\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{iP}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kP}\\ &+ \delta_{iq}\delta_{jP}\delta_{kr} + \delta_{ir}\delta_{jP}\delta_{kq} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kq}\end{aligned}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\in_{ijk} \in_{Pqr} = \delta_{iP} \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \delta_{iq} \begin{vmatrix} \delta_{jr} & \delta_{jP} \\ \delta_{kr} & \delta_{kP} \end{vmatrix} + \delta_{ir} \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kP} & \delta_{kq} \end{vmatrix}$$

أو أن

$$\in_{ijk} \in_{Pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{iP} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jP} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kP} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

مثال *(11.2)*

أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \in_{ijk} a_i b_j c_k$$

الحل:

بفك الطرف الأيمن واستخدام خواص الرمز $\in_{ijk}$ نحصل على:

$$\in_{ijk} a_i b_j c_k = \in_{123} a_1 b_2 c_3 + \in_{132} a_1 b_3 c_2 + \in_{213} a_2 b_1 c_3 + \in_{231} a_2 b_3 c_1 + \in_{312} a_3 b_1 c_2 + \in_{321} a_3 b_2 c_1$$

وبإستخدام قيم $\in_{ijk}$ نحصل على:

$$\in_{ijk} a_i b_j c_k = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ولكن الطرف الأيمن بالمعادلة الأخيرة يعطي قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6.2 الموترات الزائفة (Pseudotensor)

قبل البدء بتعريف هذا النوع من الموترات، دعنا نعطي طريقة أخرى مختلفة لكتابة الموترات. نفترض أنه لدينا عمود له N من المركبات وحيث نكتبه عادة على الصورة:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad (33.2)$$

فإذا خضعت الكميات x_i عند تحويل الإحداثيات إلى التحويلة:

$$\bar{x}_i = A_i^j \, x_j \qquad (34.2)$$

فإننا نطلق على الكميات x_i مركبات موتر موافق التغاير من الرتبة الأولى (مركبات متجه) وذلك حسب التحويلة $A.(34.2)$ هي مصفوفة غير شادة *(nonsingular matrix)* ذات بعد $N \times N$. في المعادلة (34.2) j ترمز للأعمدة و i للصفوف.

وفي حالة أنه لدينا صف له N من المركبات فإننا نكتبه على النحو:

$$\underline{x} = (x^1 x^2 \ldots\ldots x^N) \qquad (35.2)$$

وكذلك إذا خضعت الكميات x^i عند تحويل الإحداثيات إلى التحويلة:

$$\overline{x}^1 = \left(\overline{A}^1\right)^i_j x^i \qquad (36.2)$$

فإننا نطلق في هذه الحالة على x^i مركبات موتر من الرتبة الأولى من النـوع مخالف التغاير.

وهكذا يمكن تعميم هذا التعريـف للموتـرات مـن رتـب عليـا، فمثـلاً x'^i_{jl} تكون موتراً من الرتبة الثالثة وموافقة التغاير في j و l ومخالفة التغاير في i إذا ما تحولت مركباتها على النحو:

$$\overline{x}^i_{jl} = A^m_j A^n_l (\overline{A}^1)^i_k X^k_{mn} \qquad (37.2)$$

مثال **(12.2)**

إذا كانت الكميات δ'_j معرفة على النحو:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

فإن:

$$\left(A^l_j\right)\left(\overline{A}^1\right)^i_m \delta^m_l = A^l_j (\overline{A}^1)^i_l = (A\overline{A}^1)^i_j$$

أي أن:

$$\overline{\delta}^i_j = A^l_j \left(\overline{A}^1\right)^i_m \quad \delta^m_l$$

وهذا يعني أن δ^i_j موتر مختلط من الرتبة الثانية.

الآن نعود إلى هذه التحويلات لنلاحظ أن محددها له الخاصية التاية:

$$\det A = \pm 1 \qquad (38.2)$$

حيث $\det A = +1$ ذات علاقة بعملية الدوران المكاني.و $\det A = -1$ ذات علاقة بعملية انقلاب مكاني أو دوران وإنقلاب مكانيين معاً.

من المثال *(11.2)* نرى أن:

$$\in_{ijk} \det A = A^l_i A^m_j A^n_k \in_{lmn} \qquad (39.2)$$

ومن هذه المعادلة وإذا كان $\det A = +1$ تصبح $\in_{ijk}$ موتراً (حالة دوران فقط) ولكن إذا كان $\det A = -1$ فإن $\in_{ijk}$ لا تمثل موتراً ولكن نطلق عليها موترا زائفاً.

وهكذا فإن الموترات الزائفة هي كميات تتحول كالموترات تحت تأثير الدوران المكاني ولكن في حالة الانقلاب المكاني أو الدوران مع الانقلاب المكاني تتحول هذه الكميات كالموترات مع تغير إشارة محدد التحويل.

وبتفصيل أكثر نرى أن:

أ – الموتر الزائف من الرتبة صفر (كمية قياسية زائفة) تتحول على النحو:

$$\overline{U} = (\det A)\, U \qquad (40.2)$$

ب– الموتر الزائف من الرتبة الأولى تتحول مركباته على النحو:

$$\overline{B}_i = (\det A)\, A^j_i\, B_j \qquad (41.2)$$

حـ- الموتر الزائف من الرتبة الثانية تتحول مركباته على النحو:

$$\overline{B}_{ij} = (\det A)\ A_i^l\, B_j^m\ B_{lm} \qquad (42.2)$$

وهكذا نخلص إلى القول بأن الموترات الزائفة يمكن تمييزها عن الموترات العادية في حالة التحويلات المختلفة $(\det A = -1)$

نلاحظ أيضاً أنه إذا كان B_i موتراً زائفاً فإن $\frac{\partial B_i}{\partial x_i}$ تكون كمية قياسية زائفة.

تمارين (2)

1- بين أي من العمليات التالية صحيحة وأي منهما خطأ، اذكر السبب في كل حالة واكتب الناتج كلما أمكن ذلك.

أ - $A_n^{lk} + c_n^{lk} + B_n^{lk}$

ب- $A_{kl}^{lPm} \pm B_{kl}^{lPmn}$

حـ- $\alpha A_P^{ln} + \gamma B_{ln}$ ، α و γ كميات لازمة.

د- $\alpha A_k^{ln} + \gamma c_k^{ln} + \beta D_k^{ln}$ ،α و γ و β كميات لازمة.

2- أذكر لكل ما يلي رتبة الموتر الناتج ونوع العملية المستعملة:

أ - A_{ijk} ب- A_{kjm}^{ij}

حـ- $A_{j_1,j_2}^{i,l_2,...,l_{10}}$ د- $B_k^j C^{klm}$

هـ- $A_{klm}^{ij} C_j^m$ (A و B و C موترات).

3- برهن على صحة قانون القسمة من خلال الأمثلة التالية:-

أ - A^{ij} كميات معطاة و $C_i A^{ij}$ موتر و C_i متجه اختياري.

ب- A_{ij} كميات معطاة و $C^i A_{ij}$ موتر و C^i متجه اختياري.

حـ- A^{ijkl} كميات معطاة و $C_{ij} A^{ijkl}$ موتر و C_{ij} موتر اختياري.

4- ماذا يحدث لو أن حاصل الضرب الداخلي في الأمثلة السابقة ليس بموتر؟ اشرح.

5- اثبت أن التحويلات من النوع (34.2) أو (36.2) يكون $det A = \pm 1$

6- اكتب العلاقة المناظرة للعلاقة (42.2) إذا كان $\underset{\sim}{B}$ مخالف التغاير.

7- اثبت أنه إذا كان B_i موتراً زائفاً فإن $\frac{\partial B_i}{\partial x_i}$ كمية قياسية زائفة.

8- بإستخدام رموز التبادليل $\in_{ijk}$ أثبت أن:

$$\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

9- بإستخدام خواص $\in_{ijk}$ أثبت أن:

أ - $(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$

ب- $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{D})\vec{C}-[\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})]\vec{D}$

مع ملاحظة أن $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})\neq(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$

الفصل الثالث

العنصر الخطي *The Line Element*

1.3 الموتر الأساسي.

2.3 طول منحنى.

3.3 مقدار المتجه.

4.3 الموترات المشاركة.

5.3 الزاوية بين متجهين (التعامد).

1.3 الموتر الأساسي *(Fundamental tensor)*

الآن نقدم لمفهوم المسافة في الفضاء ذي البعد N وهو V_N . إذا كانت المسافة ds، بين نقطتين متجاورتين إحداثياتهما x^i و $x^i + dx^i$ تعطي بالصيغة التربيعية التفاضلية *(quadratic differential Form)*.

$$d S^2 = g_{ij} dx^i d x^j \qquad (1.3)$$

وحيث g_{ij} هي دوال في x^i تحقق الشرط $g = |g_{ij}| \neq 0$ (أي أن محدد g_{ij} لا يساوي الصفر)؛ عندئذ نسمي الفضاء بفضاء ريمان *(Riemannian Space)*.

نفترض أيضاً أن المسافة بين نقطتين متجاورتين لا تعتمد على منظومة الاحداثيات المستعملة، أي أنها مستقلة عنها أو أن ds كمية لا متغيرة. ومن قانون القسمة يكون $g_{ij} + g_{ji}$ موتراً مساوي التغاير من الرتبة الثانية. هذا ويمكننا كتابة g_{ij} على النحو:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) \qquad (2.3)$$

ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned}(g_{ij} - g_{ji}) d x^i d x^j &= g_{ij} d x^i d x^j - g_{ji} d x^i d x^j \\ &= g_{ij} d x^i d x^j - g_{ij} d x^i d x^j = 0 \qquad (3.3)\end{aligned}$$

وهكذا فإن الحد الثاني في *(2.3)* لا يضيف أي قيمة لـ ds^2، وبذلك نستطيع عموماً اعتبار أن g_{ij} متماثل أي أن g_{ij} موتر متوافق التغاير ومتماثل ومن الرتبة الثانية ويسمى بالموتر الأساسي لفضاء ريمان.

بينما تسمى الصيغة التربيعية $g_{ij}\, d x^i\, d x^j$ بالمتري *(metric)* وهي أيضاً مربع العنصر الخطي ds. فمثلاً للفضاء الاقليدي بثلاثة أبعاد وفي الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة؛ نرى أن:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (4.3)$$

أي أن:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

والمتري هنا موجب تحديداً *(Positive definite)* ، أي إنه إذا كان $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ فإن $ds^2 = 0$. بينما أن $ds^2 \geq 0$ لكل القيم الحقيقية الأخرى لـ dx^1 , dx^2 , dx^3.

في النسبية الخاصة نتعامل مع الفضاء ذي الأربع أبعاد وحيث يكون العنصر الخطي هو:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + C^2 (d\,x^4)^2 \qquad (6.3)$$

والمتري هنا ليس موجباً تحديداً، حيث أنه موجب لمنحنيات يكون فيها x^1 ، x^2 ، x^3 ثابتة. بينما يكون سالباً لكل المنحنيات التي يكون فيها x^4 ثابتاً. وهذا يعني أن المسافات بين النقاط المتجاورة لمثل هذه المنحنيات لا يمكن أن تكون حقيقية.

ولكي تكون المسافة حقيقية بين النقاط المتجاورة نضع:

$$ds^2 = e\, g_{ij}\, d\,x^i\, dx^j \qquad (7.3)$$

وحيث e كمية نسميها بالمؤشر *(indicator)* ويأخذ القيم $+1$ أو -1 بحيث تكون ds^2 موجبة دائماً.

مثال (1.3):

اثبت أن المتري لفضاء إقليدس في الإحداثيات الإسطوانية $(x^3 = z , x^2 = \phi , x^1 = \rho)$ هو:

$$d s^2 = d \rho^2 + \rho^2 d \phi^2 + d z^2$$

الحل:

بإستخدام العلاقة بين الإحداثيات الإسطوانية والإحداثيات الكارتيزية وهي:-

$$z = z , y = \rho \sin \phi \quad , \qquad x = \phi \cos \phi$$

نرى أن:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= (\cos \phi \, d\rho - \rho \sin \phi \, d \phi)^2 \\ &+ (\sin \phi \, d \rho + \rho \cos \phi \, d \phi)^2 + (d z)^2 \\ &= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) (d \rho)^2 + \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) (d\phi)^2 + (d z)^2 \\ &= d \rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + d z^2 \end{aligned}$$

ولو وضعنا $ds^2 = g_{ij} \, d x^i \, d x^j$ فإن الموتر الأساسي في هذه الحالة هو:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 طول منحنى *Length of a Curve*

لـــو أن $x^i = x^i(t)$ (حيث t بـــارامتر) وبإستعمال المعادلة (6.3) التي تعطـي المسافة بين نقطتــين متجاورتين نــرى أن طول المنحنى بين النقطتين $t = t_1$ و $t = t_2$ هو:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{e\, g_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}} \qquad (7.3)$$

وإذا كان:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \qquad (8.3)$$

على منحنى فإن المسافة بين النقطتين المماثلتين للقيم t_1 و t_2 تساوي الصفر بالرغم من أنهما غير منطبقتــين. مثـل هـذا المنحنـى يســمى بـالمنحنى الأصغـر *(minimal)* أو بالمنحنى المتلاشي *(null)*.

مثال (2.3)

أثبت أن المنحنى المعطى على النحو:

$$x^1 = c \int r \cos\theta \cos\phi \, dt$$

$$x^2 = c \int r \cos\theta \sin\phi \, dt$$

$$x^3 = c \int r \sin\theta \; dt$$

$$x^4 = \int r \; dt$$

حيث $ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + C^2 (dx^4)^2$

هو منحنى حقيقي متلاشي في v_4.

الحل:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 (dx^4)^2 \\ &= -c^2 r^2 \cos^2\theta \cos^2\phi - c^2 r^2 \cos^2\theta \sin^2\phi - c^2 r^2 \sin^2\phi + c^2 r^2 \\ &= -c^2 r^2 \cos^2\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - c^2 r^2 \sin^2\theta + c^2 r^2 \\ &= -c^2 r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + c^2 r^2 = 0 \end{aligned}$$

وبذلك فإن المنحنى المعطى هو منحنى حقيقي متلاشي في V_4.

ونلاحظ، للأهمية، أنه لا يوجد منحنى حقيقي متلاشي في فضاء ريمان يكون المتري له موجباً تحديداً.

ويتكون المنحنى عموماً من قطع على طولها يكون المؤشر (e) يساوي $+1$ وقطع على طولها $e=-1$ وكذلك من قطع متلاشية وطول المنحنى عندئذ هو مجموع أطوال هذه القطع.

وباستثناء المنحنيات المتلاشية فإن البارامتر t يمكن اختياره على أنه المسافة القوسية s من نقطة ثابتة من المنحنى. نلاحظ أيضاً من المعادلة (6.3) أن:-

$$e\, g_{ij} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1 \qquad (9.3)$$

وهذا يعني أن:

$$e^2 g_{ij} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = e \qquad (10.3)$$

ولكن $e^2 = 1$ وبذلك فإن

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = e \qquad (11.3)$$

والعلاقة *(11.3)* صالحة فقط للنقاط من المنحنى التي لايكون عندها متلاشياً.

3.3 مقدار متجه ***Magnitude of a vector***

يعرف مقدار أو قيمة متجه مخالف التغاير A^i على أنه:

$$(A)^2 = e_{(A)} g_{ij} A^i A^j \qquad (12.3)$$

و $e_{(A)}$ هو المؤشر المرتبط بالمتجه A ويساوي ± 1 ويجعل A حقيقياً. نلاحظ أنه في الفضاء الاقليدي، وفي الاحداثيات الكارتيزية، $e_{(A)}=+1$ و g_{ij} هو الموتر *(5.3)* في ثلاثة أبعاد وبذلك نحصل على الصيغة المعتادة لمقدار المتجه $(A)^2$ وهي:

$$(A)^2 = A^i A^i \qquad (13.3)$$

نقدم أيضاً للموتر المرافق (من النوع مخالف التغاير) لـ g_{ij} وهو g^{ij} وذلك من خلال الصيغة:

$$g_{ij} g^{ik} = \delta^k_j \qquad (14.3)$$

وعلى هذا نعرف قيمة أو مقدار المتجه B_i (مســاوي التغـاير) وذلـك علـى الصورة:

$$(B)^2 = e_{(B)}\, g^{ij}\, B_i\, B_j \qquad (15.3)$$

$e_{(B)}$ هو المؤشر المرتبط بالمتجه B.

مثال (3.3)

اثبت أن $(A)^2$ و $(B)^2$ كميتان لازمتان (لا متغيران).

الحل:

من العلاقة (12.3) نلاحظ أن:

$$(\overline{A})^2 = e_{(A)}\, \overline{g}_{ij}\, \overline{A}^i\, \overline{A}^j$$

ولكن g_{ij} موتر مساوي التغير و A^i متجه مخالف التغير عليه فإن:

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\, g_{lm}$$

ومنها نحصل على:

$$(\overline{A})^2 = e_{(A)}\, \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j} g_{lm}\, \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s} A^s\, \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r} A^r$$

$$= e_{(A)} \left(\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s}\right)\left(\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s}\right) g_{lm}\, A^S A^r$$

$$= e_{(A)}\, (\delta^l_S)\, (\delta^m_r)\, g_{lm}\, A^S A^r = e_{(A)}\, g_{lm}\, A^l A^m = (A)^2$$

وهذا يعني أن $(A)^2$ كمية لازمة (لا متغيرة) وبنفس الكيفية يمكننا اثبات أن $(B)^2$ كمية لازمة.

وأي متجه قيمته *1* يسمى بمتجه وحدة *(unit vector)* وبذلك فإن $\frac{dx^i}{ds}$ تمثل مركبات وحدة متجه انقباضية [انظر العلاقة *(6.3)*].

كما أنه لو كانت قيمة المتجه تساوي الصفر فإن المتجه يسمى بالمتلاشي *(null vector)*. والمتجه المماس لمنحنى متلاشي هو متجه متلاشي.

4.3 الموترات المشاركة *(Associate tensors)*

إن حاصل الضرب الداخلي للموتر الأساسي g_{ij} والمتجه مخالف التغاير A^j هو المتجه $g_{ij}A^j$ ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\overline{g_{ij}\,A^j} &= \bar{g}_{ij}\,\bar{A}^j = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\,g_{lm}\,\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}\,A^s \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}\right) g_{lm}A^s \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\,\delta^m_s\,g_{lm}A^s = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\,g_{ls}A^s \qquad (16.3)\end{aligned}$$

ومن هذه العلاقة نرى أن $g_{ij}A^j$ هو متجه مساوي التغاير ويسمى بالمشارك للمتجه A^j كما يكتب على النحو:

$$A_i = g_{ij}A^j \qquad (17.3)$$

نعرف أيضاً المتجه المشارك B^i للمتجه B_i من خلال الصيغة:

$$B^i = g^{ij} B_j \qquad (18.3)$$

وهو متجه مخالف التغاير مقارنة بالمتجه مساوي التغاير B_j وعلاقة المشاركة بين المتجه والمتجه المشارك علاقة عكسية. هذا نلاحظه كما يلي:-

$$g^{ij} A_j = g^{ij} g_{jk} A^k = \delta^i_k A^k = A^i \qquad (19.3)$$

نلاحظ أننا استخدمنا العلاقة *(14.3)* للوصول للعلاقة *(19.3)* ويشار إلى هذه العملية بعملية خفض الدليل العلوي أو برفع الدليل السفلي. نلاحظ أيضاً أن:

$$e_{(A)} g_{ij} A^i A^j = e_{(A)} g_{ij} g^{ik} A_k g^{jl} A_l = e_{(A)} \delta^i_l g^{ik} A_k A_l$$
$$= e_{(A)} g^{kl} A_k A_l \qquad (20.3)$$

(لاحظ أن $g^{kl} = g^{lk}$)

والعلاقة *(20.3)* تفيد بأن قيم (أو مقادير) المتجهات المشاركة متساوية.

مثال (4.3)

أوضح بأن $(A)^2 = e_{(A)} A_i A^j$

الحل:

حيث أن:

$$(A)^2 = e_{(A)} g_{ij} A^i A^j$$

وحيث أن $A^i = g^{ik} A_k$ فإن:

$$(A)^2 = e_{(A)}\, g_{ij}\, g^{ik} A_k A^j = e_{(A)}\, \delta^k_{\ j}\, A_k A^j$$
$$= e_{(A)}\, A_j A^j = e_{(A)}\, A_i A^j$$

وعملية رفع وخفض الأدلة يمكن القيام بها على الموترات أيضاً مثلا يمكن أن نكون موترات مشاركة على النحو:-

$$A^{\bullet jk}_{rs\ldots lm} = g_{ri}\ A^{ijk}_{s\ldots lm} \tag{21.3}$$

والنقطة (•) تمثل الدليل ذي العلاقة الذي تتم عليه عملية رفع الدليل وهو i هنا.

وانطلاقاً من ما سبق نرى أن الموترات المشاركة للموتر A_{ij} تعرف على النحو:

$$A^{ij} = g^{ir} g^{jS} A_{rS} \tag{22.3}$$

وهي عملية خفض الدليلين.

وعموماً وبالرغم من أن g_{ij} و g^{ij} أحدهما مرافق للآخر إلا أن هذا لا يعني أن A^{ij} هو مرافق للموتر A_{ij}.

5.3 الزاوية بين متجهين

إذا كان a^i و b^i هي مركبات وحدتي متجه فإن الزاوية θ بين وحدتي المتجهين المذكورين تعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = g_{ij}\, a^i b^j = a_j b^i = g^{jk} a_j b_k = a^k b_k \tag{23.3}$$

ومرة أخرى نرى أنه في حالة الفضاء الاقليدي في ثلاثة أبعاد (إحداثيات كارتزية). يقود هذا التعريف [الصيغة (23.3)] إلى النتيجة المعهودة:

$$\cos\theta = l\,l' + m\,m' + n\,n' \qquad (24.3)$$

للزاوية بين وحدتي المتجهين $(l', m', n'), (l, m, n)$

وتكون θ حقيقية في فضاء ريمان إذا كان المتري موجباً تحديدا. وهذا يمكن توضيحه كما يلي:

(حيث أن المتري موجب تحديداً، عليه فإن المتجه $\lambda a^i + \mu b^i$ قيمته أكبر من أو تساوي الصفر لكل الأعداد الحقيقية μ و λ أي أن:

$$g_{ij}(\lambda a^i + \mu b^i)(\lambda a^i + \mu b^j) \geq 0 \qquad (25.3)$$

وهذا يعني أن:

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \mu^2 \geq 0 \qquad (26.3)$$

ومنها نجد أن:

$$(\lambda + \mu\cos\theta)^2 + \mu^2(1 - \cos^2\theta) \geq 0 \qquad (27.3)$$

والمتباينة (27.3) صالحة لكل λ, μ وبذلك فإن:

$$1 - \cos^2\theta \geq 0 \qquad (28.3)$$

أي أن:

$$|\cos\theta| \leq 1 \qquad (29.3)$$

وهذا يعني أن θ حقيقية.

وتعميماً نرى أن الزاوية بين أي متجهين A^i و B^i هي:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, A^i\, B^j}{\sqrt{e_{(A)}\, e_{(B)}\, g_{lm}\, A^m\, g_{rs}\, B^r\, B^s}} \qquad (30.3)$$

ويكون المتجهان متعامدين إذا كان:

$$g_{ij}\, A^i\, B^j = 0$$

مثال (5.3)

أوضح بان $(1, 0, 0, 0)$ و $(\sqrt{2}\ , 0\ , 0, \sqrt{3}/c)$ تمثلان وحدتي متجه في V_4 بالمتري:

$$(ds)^2 = -(dx^1)^2 - (d\,x^2)^2 - (d\,x^3)^2 + c^2\,(d\,x^4)^2$$

الحل:

للمتجه $(1, 0, 0, 0)$ نرى أن $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ و $g_{44} = c^2$

$g_{ij} = 0$ لبقية الأدلة كما أن $A^1 = 1$ و $A^2 = A^3 = A^4 = 0$ وبذلك فإن

$$(A)^2 = e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i\, A^j = (-1)\,(-1) + 0 + 0 + 0 = +1$$

وهكذا فإن $(1,0\ ,\ 0,0)$ هو متجه وحدة في V_4 بالمتري المذكور أيضاً

للمتجه $(\sqrt{2}\, , 0, 0, \sqrt{3}/c)$ نرى أن $A^1 = \sqrt{2}$ و $A^2 = A^3 = 0$, و $A^4 = \dfrac{\sqrt{3}}{c}$ و

$$(A)^2 = e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i A^j$$
$$= (-1)(\sqrt{2})^2 + 0 + 0 + c^2 (\sqrt{3}/c)^2$$
$$= -2 + 3 = 1$$

وهذا يوضح بأن $(\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{3}/c)$ وحدة متجه.

مثال (6.3)

بالنسبة لوحدتي المتجه بالمثال السابق أوضح بأن الزاوية بينهما غير حقيقية.

الحل:

من العلاقة (23.3) ترى أن:

$$\cos\theta = g_{11} a^1 b^1 + g_{22} a^2 b^2 + g_{33} a^3 b^3 + g_{44} a^4 b^4$$
$$= (-1)(1)\sqrt{2} + 0 + 0 + c^2 (0)(\sqrt{3}/c)$$
$$= -\sqrt{2}$$

وحيث أن $|\cos\theta| \le 1$ لأي زاوية حقيقية عليه فإن θ بين $(1,0,0,0)$ و $(\sqrt{2}, 0,0, \sqrt{3}/c)$ زاوية غير حقيقية.

الآن لو عدنا للإحداثيات الخطية المنحنية q^i واعتبرنا مجموعة من المتجهات $\underset{\sim}{\epsilon}_i$ في اتجاه زيادة $d\,q^i$ فإنه لإزاحة صغيرة نرى أن:

$$d\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{\epsilon}_i\, d\,q^i \qquad (32.3)$$

وحيث:

$$\underset{\sim i}{\in} = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial q^i} \qquad (33.3)$$

وحدات المتجه ذات العلاقة $\hat{e}_i$ هي:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial q^i} \qquad (34.3)$$

أي أن

$$\underset{\sim i}{\in} = h_i \, \hat{e}_i \qquad (35.3)$$

(في العلاقتين *(34.3)* و *(35.3)* لا يوجد جمع على الدليل i) فمثلاً في الإحداثيات الكروية ترى أن:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim r}{\in} = \hat{e}_r \\ \underset{\sim \theta}{\in} = r\,\hat{e}_\theta \\ \underset{\sim \varphi}{\in} = r\sin\theta\,\hat{e}_\rho \end{array}\right\} \qquad (36.3)$$

بالرجوع للعلاقة *(32.3)* وحيث أن:

$$(ds)^2 = d\underset{\sim}{r} \cdot d\underset{\sim}{r} \qquad (37.3)$$

أي أن:

$$(ds)^2 = \underset{\sim i}{\in} \cdot \underset{\sim j}{\in} \, d\,q^i \, dq^j \qquad (38.3)$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة *(1.3)* نرى أن:

$$g_{ij} = \underset{\sim i}{\in} \cdot \underset{\sim j}{\in} \qquad (39.3)$$

مثال (7.3)

أثبت أن $\underset{\sim}{\epsilon}^i \cdot \underset{\sim}{\epsilon}_i = \delta^i_j$

الحل:

من تعريف المتجهات المشاركة ترى أن:

$$\underset{\sim}{\epsilon}^i = g^{ik} \underset{\sim}{\epsilon}_k$$

وبذلك فإن

$$\underset{\sim}{\epsilon}^i \cdot \underset{\sim}{\epsilon}_j = g^{ik} \underset{\sim}{\epsilon}_k \cdot \underset{\sim}{\epsilon}_j = g^{ik} g_{kj}$$

وذلك استناداً إلى العلاقة *(39.3)* ، وهكذا فإن:

$$\underset{\sim}{\epsilon}^i \cdot \underset{\sim}{\epsilon}_j = \delta^i_j$$

وذلك باستخدام العلاقة *(14.3)*

مثال (8.3)

استنادا إلى المثال السابق أثبت أن:

أ - $F_i = \underset{\sim}{F} \underset{\sim}{\epsilon}_i$ ب- $F^i = \underset{\sim}{F} \underset{\sim}{\epsilon}^i$

الحل:

أ - نكتب $\underset{\sim}{F} = F^k \underset{\sim}{\epsilon}_k$ وبذلك فإن:

$$\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\in}_i = F^k \underset{\sim}{\in}_k \cdot \underset{\sim}{\in}_i = F^k g_{ki}$$

وذلك من العلاقة (39.3) أي أن:

$$\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\in}_i = g_{ki} F^k = F_i$$

ب- نكتب هنا $\underset{\sim}{F} = F_k \underset{\sim}{\in}^k$ ونحسب $\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\in}^i$ نحصل على:

$$\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\in}^j = F_k \underset{\sim}{\in}^k \cdot \underset{\sim}{\in}^j = F_k (g^{ki} \underset{\sim}{\in}_i)(g^{Sj} \underset{\sim}{\in}_S)$$

$$= F_k g^{ki} g^{Sj} \underset{\sim}{\in}_i \cdot \underset{\sim}{\in}_S = F_k g^{ki} g^{Sj} g_{iS} = F_k g^{ki} \delta_i^j$$

$$= F_k g^{kj} = F^j$$

$$F^j = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\in}^j$$

مثال (9.3)

اثبت أن

$$g^{ij} = \underset{\sim}{\in}^i \cdot \underset{\sim}{\in}^j$$

الحل:

حيث أن

$$\underset{\sim}{\in}^j = g^{kj} \underset{\sim}{\in}_k$$

عليه فإن

$$\underset{\sim}{\in}^i \cdot \underset{\sim}{\in}^j = \underset{\sim}{\in}^i \cdot g^{kj} \underset{\sim}{\in}_k = g^{kj} \delta^i_k = g^{ij}$$

مثال (10.3)

إذا كانت $\underset{\sim}{\in}_i$ مجموعة متعامدة فأوضح بأن:

أ - g_{ij} قطري　　　　ب- $g^{ii} = 1/g_{ii}$

الحل:

أ - حيث أن　$g_{ij} = \underset{\sim}{\in}_i \cdot \underset{\sim}{\in}_j$

من العلاقة *(39.3)* وحيث أن $\underset{\sim}{\in}_i$ مجموعة متعامدة، عليه فإن:

$$g_{ii} = |\underset{\sim}{\in}_i|^2 \quad , \qquad g_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

أي أن g_{ij} قطري

ب- هنا نرى أن　$g^{ij} g_{ik} = \delta^j_k$

وحيث أن g_{ik} قطرية عليه فإن:

$$g^{ii} g_{ii} = 1 \qquad \text{(بدون جمع)}$$

ومنها نجد أن

$$g^{ii} = 1/g_{ii}$$

تمارين (3)

1- اثبت أن $g_{ij} + g_{ji}$ هو موتر مساوي التغاير ومن الرتبة الثانية.

2- اثبت أن المتري للفضاء الاقليدي بثلاثة أبعاد في الإحداثيات الكروية $(x^3 = \phi, x^2 = \theta, x^1 = r)$ هو:

$$dS^2 = d r^2 + r^2 d \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d \phi^2$$

3- اوضح بأن $\frac{d x^i}{d s}$ هي مركبات وحدة متجه.

4- أثبت أن المتجه المماس لمنحنى متلاشي هو متجه متلاشي.

5- أثبت أن B^i المعرف بالعلاقة (18.3) هو متجه مخالف التغاير.

6- اكتب العلاقة المماثلة للعلاقة (22.3) بالنسبة للموتر A_{ij}.

7- اثبت، عموماً أن A^{ij} ليس بموتر مرافق للموتر A_{ij}.

8- أ- أوضح ما إذا كانت المتجهات $(0,1,0,0)$ و$(\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{3}/c)$ تمثل وحدتي متجه في V_4 بالمتري:

$$dS^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + C^2 (dx^4)^2$$

ب- ماذا عن الزاوية بين المتجهين المذكورين في الفقرة أ.

9- أثبت أن الزاوية θ بين متجهين A^i و B^i هي:

$$\sin^2 \theta = \frac{(e_{(A)} e_{(B)} g_{ki} g_{jk} - g_{hk} g_{ij}) A^h A^i B^j B^k}{e_{(A)} e_{(B)} g_{hi} g_{jk} A^h A^i B^j B^k}$$

10- اثبت صحة العلاقة (34.3).

11- اثبت صحة العلاقة (36.3).

12- أثبت أن $|\underset{\sim}{\in}^{i}| = 1/|\underset{\sim}{\in}_{i}|$.

13- قم باشتقاق الموترات المترية الأساسية مخالفة ومساوية التغاير في الإحداثيات الإسطوانية.

14- توصف بلورة ثلاثية الميل بواسطة المتجهات القاعدية مساوية التغاير:

$$\underset{\sim}{\in}_{1} = 1.5\,\hat{i} \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{\in}_{2} = 0.4\,\hat{i} + 1.6\,\hat{j} \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{\in}_{3} = 0.2\,\hat{i} + 0.3\,\hat{j} + \hat{k}$$

أحسب الموتر الأساسي g_{ij} في هذه الحالة.

15- إذا كان A_{ij} هو موتر مساوي التغاير وملتوي التماثل فأثبت بأن $\frac{1}{\sqrt{g}}(A_{23}, A_{31}, A_{12})$ هو متجه مخالف التغاير.

الفصل الرابع

التفاضل الموافق للتغاير

Covariant Differentiation

1.4 رموز كريستوفل.

2.4 قوانين التحويل لرموز كريستوفل.

3.4 التفاضل الموافق للتغاير للمتجهات.

4.4 عمليات الموترات التفاضلية.

5.4 المشتقات الذاتية للمركبات الموافقة للتغاير.

1.4 رموز كريستوفل

رموز كريستوفل ليست موترات ولكنها كميات رياضية لها العديد من التطبيقات وخاصة في الهندسة التفاضلية *(Differential Geometry)* والنظرية النسبية *(Relativity Theory)* ورموز كريستوفل نوعان أول وثاني، ويمكن ايجاد تعريفان لهذه الرموز، وذلك لو تصورنا نقطة تتحرك على منحنى لها احداثيات (x^i) إلى نقطة مجاورة إحداثياتها $(x^i + dx^i)$. فإن متجه الوحدة (القاعدة) *(Basis Vectors)* $\hat{e}_i$ عادة يتغير بمقدار $d\hat{e}_i$ فهذا المتجه الجديد $d\hat{e}_i$ يرتبط مع متجه الوحدة بعلاقة خطية في dx^i وتكتب على هذا النحو:

$$d\hat{e}_i = \Gamma^k_{ij}\, dx^j\, \hat{e}_k \qquad (1.4)$$

حيث Γ^k_{ij} يمثل معامل سيتم تحديده في هذا البند.

المعادلة رقم (1.4) يمكن اعادة كتابتها على الشكل:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\, \hat{e}_k \qquad (2.4)$$

ولكن متجهات الوحدة $\hat{e}_i$ ترتبط مع بعضها بعلاقة مهمة وهي:

$$\hat{e}_i \,.\, \hat{e}_l = g_{il} \qquad (3.4)$$

حيث g_{il} يمثل موتراً مترياً موافقاً للتغاير من الرتبة الثانية وله خاصية التماثل $(g_{il} = g_{li})$ كما سبق وأن ذكرنا. بأخذ تفاضل المعادلة *(3.4)* بالنسبة لـ x^k نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\hat{e}_t \,.\, \hat{e}_l) = \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} = \hat{e}_j \,.\, \frac{\partial \hat{e}_l}{\partial x^k} + \hat{e}_l \,.\, \frac{\partial \hat{e}_j}{\partial x^k} \qquad (4.4)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^k}$ من المعادلة *(2.4)* في المعادلة *(4.4)* نحصل على:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} = \hat{e}_j \,.\, \Gamma^m_{lk} \;\hat{e}_m + \hat{e}_l \;\Gamma^m_{jk}\, \hat{e}_m \qquad (5.4)$$

من المعادلة *(3.4)* يمكن إعادة كتابة المعادلة *(5.4)* على الصورة:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} = \Gamma^m_{lk} \; g_{jm} + \Gamma^m_{lk} \; g_{lm} \qquad (6.4)$$

المعادلة *(6.4)* نجري بها تغيير تسمية الأدلة على النحو:

$k \rightarrow j$ و $l \rightarrow k$ و $j \rightarrow l$

وهذا لا يؤثر على قيمة المقدار لأن مثل هذه الأدلة عادة يطلق عليها الأدلة الدمية *(dummy indices)*؛ حيث أن تغير تسميتها لا يؤثر في قيمة المقدار مطلقاً. والمعادلة *(6.4)* بعد إعادة تسميه الأدلة تكتب على النحو:

$$\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} = \Gamma^m_{kj} \; g_{lm} + \Gamma^m_{lj} \; g_{km} \qquad (7.4)$$

مرة أخرى نغير تسمية الأدلة في المعادلة *(6.4)* على النحو:

$k \rightarrow l$ و $j \rightarrow k$ و $l \rightarrow j$

فنحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} = \Gamma^m_{jl}\, g_{km} + \Gamma^m_{kl}\, g_{jm} \qquad (8.4)$$

ونلاحظ أن المعامل Γ^l_{ki} يحمل خاصية التماثل التي تعطي بالعلاقة:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki} \qquad (9.4)$$

وخاصية التماثل للمعامل Γ^l_{ki} يمكن اثباتها على النحو:

من تعريف متجه الوحدة الذي يعطي بالعلاقة:

$$\hat{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i} \qquad (10.4)$$

حيث $\vec{R}$ هو متجه الموضع وبإجراء عملية تفاضل للمعادلة *(10.4)* بالنسبة لـ x^l واستخدام العلاقة المعطاة بالمعادلة *(10.4)* نحصل على

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} = \frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^i} \qquad (11.4)$$

بإستخدام المعادلة *(2.4)* نحصل على قيمة كل من $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^k}$ و$\frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^i}$

على الصورة:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik}\ \hat{e}_k \qquad (12.4)$$

وكذلك

$$\frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^i} = \Gamma^l_{ki}\ \hat{e}_l \qquad (13.4)$$

من المعـادلات السـابقة *(11.4)* و *(12.4)* و *(13.4)* نستنتج صحة خاصية التماثل للمعامل Γ^k_{ij} المعطاة بالمعادلة *(9.4)*.

بإستخدام خاصية التماثل للمعامل Γ^k_{ij} والموتر المتري g_{ij} وبجمع المعادلة *(6.4)* مع المعادلة *(7.4)* ثم طرح المعادلة *(8.4)* منهما نحصل على العلاقة التالية:

$$2\, g_{lm}\, \Gamma^m_{jk} = \frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \qquad (14.4)$$

بضرب المعادلة السابقة بـ g^{il} واستخدام أحد خواص الموتر المتري$(g_{lm}\, g^{il} = \delta^i_m)$ وبهذا يمكن تحديد قيمة المعامل Γ^i_{jk} الذي يعرف على أنه رمز كريستوفل من النوع الثاني ويعطى على النحو:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \qquad (15.4)$$

الرمز $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ أو $\{jk\,,\, i\}$ يستخدم في بعض المراجع ليعبر عن الرمز Γ^i_{jk}.

أما بالنسبة لرمز كريستوفل من النوع الأول فإنه يعرف على الصورة:

$$[jk\,,\, l] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \qquad (16.4)$$

من المعادلة *(15.4)* والمعادلة *(16.4)* نرى أن العلاقة بين رموز كريستوفل من النوع الثاني والأول هي:

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il}\, [jk\,,\, l] \qquad (17.4)$$

بضرب المعادلة (17.4) في الموتر المتري g_{is} نحصل على:

$$g_{is}\ \Gamma^{i}_{jk} = g_{is}\, g^{il}\, [jk\,,\, l] \qquad (18.4)$$

وبإستخدام خواص الموتر المتري يمكن تبسيط العلاقة السابقة إلى:

$$[j\,k,\, s] = g_{is}\ \Gamma^{i}_{jk} \qquad (19.4)$$

هذه العلاقة تربط بين رموز كريستوفل من النوع الأول والثاني.

مثال (1.4)

أوجد حاصل جمع: $[Pm\,,\, q] + [gm\,,\, P]$ ؟

الحل:

باستخدام المعادلة (16.4) وخاصية التماثل للموتر المتري نجد أن:

$$[P_m,q]+[q_m,P]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{Pq}}{\partial x^{m}}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^{P}}-\frac{\partial g_{Pm}}{\partial x^{q}}+\frac{\partial g_{Pq}}{\partial x^{m}}+\frac{\partial g_{mP}}{\partial x^{q}}-\frac{\partial g\, g_{qm}}{\partial x^{P}}\right) \qquad (20.4)$$

إذا حاصل الجمع يمكن كتابته على النحو:

$$[Pm\,,\, q] + [qm\,,\, P] = \frac{\partial g_{Pq}}{\partial x^{m}} \qquad (21.4)$$

مثال (2.4)

أوجد تفاضل الموتر المتري g^{ik} باستعمال رموز كريستوفل؟

الحل:

حيث أن:

$$g^{jk} g_{ij} = \delta_j^k \qquad (22.4)$$

تقوم بإجراء عملية تفاضل للمعادلة *(22.4)* فنحصل على:

$$g_{ij} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} + g^{jk} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = 0 \qquad (23.4)$$

وبضرب المعادلة *(23.4)* في g^{ir} واستخدام المعادلة *(22.4)* يمكن اعادة كتابة المعادلة *(23.4)* على النحو:

$$\delta_j^r \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = - g^{ir} g^{jk} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \qquad (24.4)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$ من المعادلة (21.4) في المعادلة (24.4) وبفك الجمع على j نرى أن المعادلة (24.4) تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = - g^{ir} g^{jk} \left([im, j] + [jm, i]\right) \qquad (25.4)$$

ومن العلاقة رقم *(19.4)* يمكن وضع المعادلة *(25.4)* على الصورة:

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = - g^{ir} g^{ik} (g_{jS} \Gamma^S_{im} + g_{iP} \Gamma^P_{jm}) \qquad (26.4)$$

ويمكن تبسيط المعادلة (26.4) على النحو:-

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = - g^{ir} \delta^k_S \ \Gamma^S_{im} - g^{jk} \delta^r_P \Gamma^P_{jm} \qquad (27.4)$$

بفك الجمع على P, S نحصل على الصورة النهائية لتفاضل الموتر المتري ويمكن كتابته على النحو:-

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = - g^{ir} \Gamma^k_{im} - g^{jk} \Gamma^P_{jm} \qquad (28.4)$$

مثال (3.4)

اثبت صحة العلاقة الآتية $\left(\Gamma^j_{jm} = \frac{\partial}{\partial x^m} ln\sqrt{g} \right)$ حيث (g) هو محدد الموتر المتري g_{ij}.

الحل:

بما أن المحدد g يعطي بالعلاقة التالية:

$$g = g_{ik} G(j, k)$$

والجمع في هذه يكون على الدليل k فقط حيث $G(j, k)$ هو محيدد Cofactor المحدد g وهو لا يحتوي على g_{ik} بصراحة، بأخذ التفاضل $\frac{\partial}{\partial g_{jr}}$ للمعادلة (29.4) نحصل على :

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial g_{jr}} G(j, k) = \delta_r^k \; G(j, k) \qquad (30.4)$$

بفك الجمع على k تأخذ المعادلة (30.4) الصورة:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial g_{jr}} = G(j, r) \qquad (31.4)$$

ولو أخذنا تفاضل المعادلة (29.4) بالنسبة لـ x^l واستخدمنا قاعدة السلسلة نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \qquad (32.4)$$

وبالتعويض عن قيمته $\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}$ من المعادلة (31.4) في المعادلة (32.4) نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = G(j, r) \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \qquad (33.4)$$

وبضرب المعادلة (29.4) في g^{ir} واستخدام خواص تماثل الموتر المتري نحصل على:

$$g^{jr} g = \delta_r^k \; G(j, k) = G(j, r) \qquad (34.4)$$

وبإستخدام المعادلة (34.4) في المعادلة (33.4) يمكن الوصول إلى الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g^{jr} g \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \qquad (35.4)$$

ومن المعادلة (21.4) يمكن إعادة كتابة المعادلة (35.4) على النحو:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g^{jr} g ([jm, r] + [rm, j]) \qquad (36.4)$$

ومن المعادلة (17.4) يمكن اختصار المعادلة (36.4) إلى الصورة:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g \left(\Gamma^j_{jm} + \Gamma^r_{rm}\right) \qquad (37.4)$$

بتغير تسمية الدليل $r \rightarrow j$ في الحد الثاني بالمعادلة (37.4) نحصل على:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = 2 g \Gamma^i_{jm} \qquad (38.4)$$

ويمكن تبسيط المعادلة (38.4) في صورة أخرى لتصبح على الشكل:

$$\Gamma^i_{jm} = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln\sqrt{g} \qquad (39.4)$$

2.4 قوانين التحويل لرموز كريستوفل:

لإيجاد قوانين التحويل لرموز كريستوفل في أنظمة الإحداثيات المختلفة نبدأ أولاً بالموتر المتري g_{jk} حيث يتم تحويل هذا الموتر حسب تعريف تحويل الموترات والذي يعطي بالعلاقة:

$$\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq} \qquad (40.4)$$

بإجراء عملية تفاضل للمعادلة *(40.4)* بالنسبة إلى نظام الإحداثيات $\bar{x}$ تأخذ المعادلة السابقة الشكل:

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial g_{Pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k} g_{pg} + \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq} \qquad (41.4)$$

وبتغير تسمية الأدلة الدمية $j \to k$ و $m \to j$ و $k \to m$ وكذلك $P \to q$ و $q \to r$ و $r \to P$ (وحيث نلاحظ مرة أخرى بأن التغير في تسمية الأدلة الدمية لا يؤثر في قيمة المقدار) تأخذ المعادلة *(41.4)* الصورة:

$$\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^P} \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr} \qquad (42.4)$$

مرة أخرى نجعل $k \to j$ و $m \to k$ و $j \to m$ وكذلك $P \to r$ و q و $r \to q$ و $q \to P$ في المعادلة *(41.4)* لنحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{rP}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rP}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} g_{rP} \qquad (43.4)$$

بطرح المعادلة *(41.4)* من مجموع المعادلتين *(42.4)* و *(43.4)* ثم ضرب الناتج في $\frac{1}{2}$ نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}$$

$$\times\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^P} + \frac{\partial g_{rP}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{Pq}}{\partial x^r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr}\right.$$

$$+ \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} g_{rP} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{qr}$$

$$+ \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rP} - \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{Pg}$$

$$\left. - \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k} g_{Pq} \right) \qquad (44.4)$$

بتغير تسمية الأدلة في الحد الثاني في المعادلة *(44.4)* واستخدام تعريف رموز كريستوفل يمكن اختصار المعادلة السابقة إلى الصورة الآتية:

$$\overline{[jk, m]} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} [pq,r] + \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq} \qquad (45.4)$$

من المعادلة *(45.4)* وتعريف الموترات يتبين أن رموز كريستوفل ليست موترات وذلك لوجود الحد الثاني في المعادلة السابقة.

الآن تحويل الموتر المتري يأخذ الشكل:

$$\bar{g}^{im} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{St} \qquad (46.4)$$

من المعادلة *(46.4)* المعادلة *(45.4)* نحصل على الآتي:

$$\bar{g}^{im} \, \overline{[jk, m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^g}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{St} [pq, r]$$

$$+ \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{St} g_{pq} \qquad (47.4)$$

وبإستخدام تعريف رموز كريستوفل من النوع الثاني يمكن اختصار المعادلة *(47.4)* على الصورة:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S} \delta^r_t \, g^{St} [pq, r]$$

$$+ \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^t} \delta^q_S \, g^{St} g_{pq} \qquad (48.4)$$

كما يمكن اختصار هذه المعادلة إلى صورة أبسط وذلك على الشكل:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S} \Gamma^S_{Pq} + \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^P} \qquad (49.4)$$

وتؤكد المعادلة *(49.4)* أن رموز كريستوفل ليست موترات مع ملاحظة أن هذه الرموز يتم تحويلها على أنها موترات وذلك في حالة التحويلات الخطية فقط أي عندما

$$\frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = 0$$

مثال (4.4)

احسب رموز كريستوفل من النوع الأول للفضاء التالي:

$$d^2s = dr^2 + r^2\, d\,\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\,\phi^2 \qquad (50.4)$$

الحل:

مركبات الموتر المتري الموافق للتغاير يمكن حسابها من المعادلة السابقة على الصورة التالية:

$g_{11} = 1$ ، $g_{22} = r^2$ وكذلك $g_{33} = r^2 \sin^2\theta$

وأما بقية مركبات الموتر المتري لهذا الفضاء تساوي صفراً، أي أن $g_{ik} = 0$ لكل $i \neq k$ ومن هنا يمكن حساب محدد الموتر المتري والتي تعطي بالعلاقة:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2\theta \qquad (51.4)$$

مركبات الموتر المتري المخالف للتغاير تحسب كما درسنا في الفصول السالفة على النحو التالي:

$$g^{ij} = \frac{G(i,j)}{g} \qquad (52.4)$$

حيث $G(i,j)$ هو محيدد المحدد g ومن المعادلة (52.4) توجد مركبات الموتر المتري وهي:

$$g^{11} = \frac{r^4 \sin^2\theta}{g} = 1 \qquad (53.4)$$

$$g^{22} = \frac{r^2 \sin^2\theta}{g} = \frac{1}{r} \qquad (54.4)$$

$$g^{33} = \frac{r^3}{g} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \qquad (55.4)$$

وأما بقية المركبات فإنها تساوي صفراً، أي أن $g^{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ ومن ثم يمكن حساب رموز كريستوفل من النوع الأول حسب المعادلة (16.4) على النحو:

$$[11,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{\partial g_{11}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial r}\right) = 0 \qquad (56.4)$$

وكذلك

$$[22,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}\right) = -r \qquad (57.4)$$

وهكذا يمكن حصر رموز كريستوفل من النوع الأول لهذا الفضاء على النحو التالي:

$$[11,3] = [11,2] = [11,1] = 0$$

$$[12,3] = [12,2] = [12,1] = 0$$

$$[13,3] = r \sin^2\theta \quad , [13,2] = [13,1] = 0$$

$$[21,3] = [21,2] = [21,1] = 0$$

$$[22,3] = [22,2] = [22,1] = 0$$

$$[23,3] = r^2 \sin\theta \cos\theta \quad , \quad [23,2] = [23,1] = 0$$

$$[31,3] = r \sin^2\theta \quad , [31,2] = [31,1] = 0$$

$$[32,3] = r^2 \sin\theta \cos\theta \quad , \quad [32,2] = [32,1] = 0$$

$$[33,3] = 0 , [33,2] = - r^2 \sin\theta \cos\theta \quad , [33,1] = - r \sin^2\theta$$

مثال (5.4)

احسب رموز كريستوفل من النوع الثاني للفضاء ذي الإحداثيات الاسطوانية.

الحل:

مركبات الموتر المتري في الإحداثيات الإسطوانية تعطي بالعلاقات التالية:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{22} &= \rho^2 \\ g_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{58.4}$$

أما بقية المركبات $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ ومن ثم يمكن حساب رموز كريستوفل من النوع الأول وهي:

$$[12,2] = [21,2] = \rho \tag{59.4}$$

$$[22,1] = \rho \tag{60.4}$$

وأما بقية رموز كريستوفل من النوع الأول فإنها تساوي جميعاً الصفر.

ومن المعادلة *(59.4)* و *(60.4)* يمكن حساب رموز كريستوفل من النوع الثاني وهي:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{g_{11}} [22,1] = -\rho \tag{61.4}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{g_{22}} [12,2] = \rho \tag{62.4}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{g_{33}} [21,2] = \rho \tag{63.4}$$

مثال (6.4)

إذا كان الموتر المتري للفضاء V_N يساوي $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ اثبت الآتي:

أ - $\Gamma^i_{jk} = 0$ (عندما $i \neq j \neq k$)؟

ب- $\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$

الحل:

من تعريف رموز كريستوفل من النوع الثاني:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{il}}{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \qquad (64.4)$$

وبما إن الموتر المتري لهذا الفضاء $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ عليه نستنتج أن المقدار الذي بين الأقواس يساوي الصفر ومنه نجد أن

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \qquad (65.4)$$

وهو المطلوب اثباته في الفقرة أ. وبما أن رموز كريستوفل من النوع الثاني يمكن ايجادها من التعريف التالي أيضاً:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{g_{ls}} [i_l, s] = \frac{1}{2g_{ls}} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right) \qquad (66.4)$$

وبما أن $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ عليه فإن:-

$$\Gamma^i_{jj} = \frac{1}{2g_{ii}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \right) \qquad (67.4)$$

أي أن:

$$\Gamma^i_{jj} = \frac{-1}{2\,g_{ii}}\;\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \qquad (68.4)$$

3.4 التفاضل الموافق للتغاير للمتجهات:

Covariant differentiation of vectors

إذا كان لدينا دالة في الفضاء تمثل كمية لازمة (لا متغير) ولتكن $\phi = \phi(x^i)$ بإجراء عملية التفاضل لهذه الدالة نحصل على:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \qquad (69.4)$$

ومن هذه العلاقة يتبين أن تفاضل كمية لازمة ينتج عنه موتر موافق للتغاير من الرتبة الأولى يرمز له بـ $\phi_{,i}$ حيث $\left(\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$ ويطلق عليه تفاضل موافق للتغاير لكمية لازمة. وهنا نطرح هذا السؤال: هل تفاضل موتر موافق للتغاير ينتج عنه موتر أم لا؟

دعنا نعود إلى المعادلة *(49.4)* ونقوم بضربها في $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i}$ لنحصل على:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i}\,\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\,\Gamma^S_{Pq} + \frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^P} \qquad (70.4)$$

بتبسيط المعادلة (70.4) والحل للكمية $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$ نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i} \bar{\Gamma}^i_{jk} - \frac{\partial x^P}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^g}{\partial \bar{x}^k} \Gamma^i_{Pq} \qquad (71.4)$$

والآن نرجع إلى تعريف الموتر الموافق للتغاير من الرتبة الأولى والذي يكتب على الصورة:

$$\bar{A}_P = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^P} A_q \qquad (72.4)$$

وبإجراء عملية تفاضل للمعادلة (72.4) بالنسبة لـ $\bar{x}^k$ نحصل على المقدار التالي:

$$\frac{\partial \bar{A}_P}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^P} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A_P}{\partial x^t} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^P \partial \bar{x}^k} A_q \qquad (73.4)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{\partial^2 x^P}{\partial \bar{x}^P \partial \bar{x}^k}$ من المعادلة (72.4) في المعادلة (73.4) نحصل على:

$$\frac{\partial \bar{A}_P}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^P} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A_P}{\partial x^t} + \left(\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^n} \bar{\Gamma}^n_{Pq} - \frac{\partial x^S}{\partial \bar{x}^P} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^P} \Gamma^q_{Sl} \right) A_q \qquad (74.4)$$

في الحد الثالث نغير الأدلة $s \Leftrightarrow g$ و $l \leftarrow t$ ثم نعوض عن قيمة $\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^n} A_q$ بما يقابلها وهو $\bar{A}_n$ عندئذ يمكن تبسيط المعادلة (74.4) إلى الصورة:

$$\left(\frac{\partial \bar{A}_P}{\partial \bar{x}^k} - \bar{\Gamma}^n_{Pq} \bar{A}_n \right) = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^P} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \left(\frac{\partial A_g}{\partial x^t} - \Gamma^S_{Pt} A_S \right) \qquad (75.4)$$

وهذا يعني أن المقدار $\left(\frac{\partial A_q}{\partial x^t} - \Gamma^S_{Pt} A_S\right)$ موتر موافق للتغاير من الرتبة الثانية يطلق عليه التفاضل الموافق للتغاير لـ A_q بالنسبة إلى x^t وعادة ما يرمز للمقدار السابق بالرمز $A_{q,t}$ ويكتب على الصورة:

$$A_{q,t} = \frac{\partial A_q}{\partial x^t} - \Gamma^S_{Pt} A_s \qquad (76.4)$$

ومن هنا نستطيع أن نخلص إلى النتيجة التالية: تفاضل موتر الموافق للتغاير بالنسبة إلى الفضاء x^t لا ينتج عنه موتر وذلك لوجود الحد الثاني في المعادلة *(73.4)* ونلاحظ أننا استخدمنا الترميز المرتبط بالفاصلة في الاشتقاق.

مثال *(7.4)*

أوجد التفاضل الموافق للتغاير لموتر مخالف للتغاير من الرتبة الأولى A^P؟

الحل:

من تعريف الموتر المخالف للتغاير والذي يكتب على الصورة:

$$\overline{A}^l = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^S} A^S \qquad (77.4)$$

وبإجراء عملية التفاضل بالنسبة لـ $\overline{x}^k$ للمعادلة *(77.4)* نحصل على:

$$\frac{\partial \overline{A}^l}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial A^s}{\partial x^t} + \frac{\partial^2 x^{-l}}{\partial x^S \partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} A^s \qquad (78.4)$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^S \partial x^t}$ من المعادلة (75.4) نحصل على:

$$\frac{\partial \bar{A}^l}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^S}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^S}{\partial x^t}+\left(\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^n}\Gamma^n_{St}-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}\bar{\Gamma}^l_{im}\right)\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^S \qquad (79.4)$$

ويمكن اختصار المعادلة (79.4) لتأخذ الشكل التالي:

$$\frac{\partial \bar{A}^l}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^S}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^S}{\partial x^t}+\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^S\Gamma^n_{St}-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^S}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^S\bar{\Gamma}^l_{im} \qquad (80.4)$$

ويمكن اعادة كتابة المعادلة (80.4) لتأخذ الصورة:

$$\frac{\partial \bar{A}^l}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^S}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^S}{\partial x^t}+\Gamma^S_{Pt}A^P\right)-\delta^m_k\bar{\Gamma}^l_{im}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}A^S \qquad (81.4)$$

بفك الجمع في المعادلة (81.4) للحد الأخير ونقله إلى الطرف الأيسر وتغير تسمية بعض الأدلة نحصل على الصورة:

$$\left(\frac{\partial \bar{A}^l}{\partial \bar{x}^k}+\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{A}^i\right)=\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^S}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^S}{\partial x^t}+\Gamma^S_{Pt}A^P\right) \qquad (82.4)$$

المقدار الذي بين الأقواس يمثل موتراً مختلطاً من الرتبة الثانية وذلك حسب تعريف الموترات ويرمز له بالرمز:-

$$A^S,t \equiv \frac{\partial A^S}{\partial x^t} + \Gamma^S_{Pt} A^P \qquad (83.4)$$

ويطلق على A^S,t التفاضل الموافق للتغاير للموتر A^k بالنسبة لـ x^t.

مثال (8.4)

أوجد التفاضل الموافق للتغاير لموتر من الرتبة الثانية A_{jk} ؟

الحل:

الموتر A_{jk} حسب تعريف الموترات يكتب على الصورة:

$$\overline{A}_{il} = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l} A_{jk} \qquad (84.4)$$

بإجراء عملية التفاضل بالنسبة لـ $\overline{x}^q$ نحصل على:

$$\frac{\partial \overline{A}_{il}}{\partial \overline{x}^q} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l} A_{jk} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^l \partial \overline{x}^g} A_{jk}$$

$$+ \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^t} \qquad (85.4)$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^q}$ من المعادلة *(71.4)* في المعادلة *(85.4)* نحصل على المقدار التالي:

$$\frac{\partial \overline{A}_{il}}{\partial \overline{x}^q} = \left(\overline{\Gamma}^n_{iq}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}A_{jk} - \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\Gamma^j_{nm}A_{jk}\right)$$

$$+\left(\overline{\Gamma}^f_{lq}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^f}A_{jk} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^w}{\partial \overline{x}^q}\Gamma^k_{uw}A_{jk}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^t}\right) \qquad (86.4)$$

ويمكن اختصار المعادلة السابقة إلى أبسط صورة على النحو:

$$\left(\frac{\partial \overline{A}_{il}}{\partial \overline{x}^q} - \overline{\Gamma}^n_{iq}\overline{A}_{nl} - \overline{\Gamma}^f_{lq}\overline{A}_{if}\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^t}$$

$$\times\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_q} - \Gamma^S_{jq}A_{sk} - \Gamma^s_{kq}A_{js}\right) \qquad (87.4)$$

وحيث عوضنا من $A_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}$ بـ $\overline{A}_{nl}$ كما قمنا بإعادة تسـمية بعض الأدلة. المقدار الذي بين الأقـواس في المعادلـة *(87.4)* عبـارة عـن موتـر موافـق للتغاير من الرتبة الثالثة؛ هذا الموتر هو:

$$A_{jk,q} = \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_g} - \Gamma^S_{jq}A_{Sk} - \Gamma^S_{qk}A_{jS}\right) \qquad (88.4)$$

ويطلق على $A_{ik,q}$ التفاضل الموافق للتغاير للموتر A_{jk} بالنسبة لـ x^q.

مثال (9.4):

أوجد التفاضل الموافق للتغاير للموتر المتري g_{ik}؟

الحل:

التفاضل الموافق للتغاير للموتر المتري g_{jk} يعطي حسب المعادلة (88.4) على النحو:

$$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{jq}\, g_{sk} - \Gamma^s_{kq}\, g_{js} \qquad (89.4)$$

من المعادلة (21.4) نعوض عن قيمة $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}$ في المعادلة (89.4) فنحصل على:

$$g_{jk,q} = [j\,q, k] + [k\,q\,, j] - \Gamma^s_{jq}\, g_{sk} - \Gamma^s_{kq}\, g_{js} \qquad (90.4)$$

وبالتعويض عن قيمة $\Gamma^s_{jq}\, g_{sk}$ من المعادلة رقم (19.4) في المعادلة (90.4) نصل إلى الشكل النهائي التالي:

$$g_{jk,q} = [jq\,, k] + [kq\,, j] - [jq\,, k] - [k\,q, j] = 0 \qquad (91.4)$$

مثال (10.4)

أوجد التفاضل الموافق للتغاير للموتر δ^i_j:

الحل:

بما أن $\delta^i_{j,q}$ تعطي بالعلاقة:

$$\delta^{i}_{j,q} = \frac{\partial \delta^{i}_{j}}{\partial x^{q}} - \Gamma^{s}_{jq}\ \delta^{i}_{s} + \Gamma^{i}_{qs}\, \delta^{s}_{j} \qquad (92.4)$$

ولكن $\frac{\partial \delta^{i}_{j}}{\partial x^{q}} = 0$ (تفاضل كمية ثابتة) وبفك الجمع في المعادلة (92.4) نحصل على:

$$\delta^{i}_{j,g} = 0 - \Gamma^{i}_{jq} + \Gamma^{i}_{qj} \qquad (93.4)$$

ومن خاصية التماثل لرموز كريستوفل $\Gamma^{i}_{jq} = \Gamma^{i}_{qj}$ نحصل على:

$$\delta^{i}_{j,g} = 0 \qquad (94.4)$$

مثال (11.4)

أوجد التفاضل الموافق للتغاير للموتر A^{qS} بالنسبة لـ $\bar{x}^{k}$:

الحل:

حيث إن الموتر A^{qS} مخالف للتغاير من الرتبة الثانية عليه:

$$\bar{A}^{Pr} = \frac{\partial \bar{x}^{P}}{\partial x^{q}} = \frac{\partial \bar{x}^{r}}{\partial x^{S}} A^{qS} \qquad (95.4)$$

بإجراء عملية التفاضل بالنسبة لـ $\bar{x}^{k}$ نحصل على:

$$\frac{\partial \bar{A}^{Pr}}{\partial \bar{x}^{k}} = \frac{\partial \bar{x}^{P}}{\partial x^{q}} \frac{\partial \bar{x}^{r}}{\partial x^{S}} \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{k}} \frac{\partial A^{qS}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial^{2} \bar{x}^{P}}{\partial x^{q} \partial x^{n}} \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{k}} \frac{\partial \bar{x}^{r}}{\partial x^{s}} A^{qS}$$

$$+ \frac{\partial \bar{x}^{P}}{\partial x^{q}} \frac{\partial^{2} \bar{x}^{r}}{\partial x^{S} \partial x^{n}} \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{k}} A^{qS} \qquad (96.4)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^S \partial x^n}$, $\frac{\partial^2 \bar{x}^P}{\partial x^q \partial x^n}$ في المعادلة (96.4)

نحصل على:

$$\frac{\partial \bar{A}^{Pr}}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^{qS}}{\partial x^n}\right)+\left(\Gamma^m_{qn}\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^m}-\bar{\Gamma}^P_{ij}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\right)$$

$$\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}A^{qS}+\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\left(\Gamma^w_{Sn}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^w}-\bar{\Gamma}^r_{fa}\frac{\partial \bar{x}^f}{\partial x^S}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^n}\right)$$

$$\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}A^{qs} \qquad (97.4)$$

بفك الأقواس يمكن أن نبسط المعادلة (97.4) إلى الصورة التالية:

$$\frac{\partial \bar{A}^{Pr}}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^{qS}}{\partial x^n}\right)+\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}A^{qS}\Gamma^m_{qn}$$

$$+\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^w}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^w_{Sn}A^{qS}-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}A^{qS}\bar{\Gamma}^P_{ik}$$

$$-\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^f}{\partial x^s}A^{qS}\bar{\Gamma}^r_{kf} \qquad (98.4)$$

ويمكن اختصار المعادلة (98.4) إلى صورة أبسط وذلك بعد تغير تسمية الأدلة والتعويض عن كل $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}A^{qS}$ بـ $\bar{A}^{ir}$ و $\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}A^{qS}$ بـ $\bar{A}^{Pf}$

فنحصل على:

$$\left(\frac{\partial \bar{A}^{Pr}}{\partial \bar{x}^t}+\bar{A}^{ir}\bar{\Gamma}^P_{ik}+\bar{A}^{Pf}\bar{\Gamma}^r_{kf}\right)=\frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^S}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}$$

$$\times\left(\frac{\partial A^{qs}}{\partial x^n}+A^{qs}\Gamma^q_{qn}+A^{qs}\Gamma^s_{sn}\right) \qquad (99.4)$$

المقدار الذي بين الأقواس هو موتر مختلط من الرتبة الثالثة يسمى بالتفـاضل الموافق للتغاير للموتر A^{qS} ويرمز له كما يلي:-

$$A^{qS}_{,k} \equiv \left(\frac{\partial A^{qS}}{\partial x^{k}} + A^{jS}\, \Gamma^{q}_{jk} + A^{qi}\, \Gamma^{S}_{jk} \right) \qquad (100.4)$$

ومن الأمثلة السابقة يمكننا أن نجد قـاعدة عامـة لإيجـاد أي تفـاضل موافـق للتغاير لأي موتر على النحو:

$$\begin{aligned} A^{q_1 \cdots q_m}_{s_1 \cdots s_n , k} = & \frac{\partial A^{q_1 \cdots\cdots q_m}_{s_1 \cdots\cdots s_n}}{\partial x^{k}} - \Gamma^{l}_{s_1 k}\, A^{q_1 \cdots q_m}_{s_2 \cdots s_n} - \Gamma^{l}_{S_2 k}\, A^{q_1 \cdots q_m}_{s_1 l s_3 \cdots s_n} \\ & - \Gamma^{l}_{S_3 k}\, A^{q_1 \cdots q_m}_{s_1 s_2 l s_4 \cdots s_n} \cdots - \Gamma^{l}_{S_n k}\, A^{q_1 \cdots q_m}_{s_1 s_2 \cdots s_{n-1} l} \\ & - \Gamma^{q_1}_{kl}\, A^{l q_2 \cdots q_m}_{s_1 \cdots\cdots s_n} + \Gamma^{q_2}_{kl}\, A^{q_1 l q_3 \cdots q_m}_{s_1 \cdots s_n} + \cdots\cdots \\ & + \Gamma^{q_m}_{kl}\, A^{q_1 q_2 \cdots q_{m-1} l}_{s_1 s_2 \cdots s_n} \end{aligned} \qquad (101.4)$$

والتفاضل الموافق للتغاير يبين معدل التغير لأي كمية فيزيائيـة مستقلة عـن نظم الإحداثيات وعليه فهذه الكميات مهمة جداً في كتابة القوانـين الفيزيائيـة حيث إن القوانين يجب أن تكون مستقلة عن نظم الإحداثيات المختلفة.

مثال *(12.4)*

أوجد التفاضل الموافق للتغاير للموترات أ- A^{j}_{k} ، ب- A^{ij}_{k} ، حـ- A^{k}_{ij}. وذلك بإستخدام العلاقة المعطاة في المعادلة رقم (101.4).

الحل:

أ -

$$A^{j}_{k,q} = \frac{\partial A^{j}_{k}}{\partial x^{q}} - \Gamma^{l}_{kq} A^{j}_{l} + \Gamma^{j}_{ql} A^{l}_{k} \qquad (102.4)$$

ب- كذلك من المعادلة *(101.4)* نحصل على:

$$A^{ij}_{k,q} = \frac{\partial A^{ij}_{k}}{\partial x^{q}} - \Gamma^{l}_{kq} A^{ij}_{l} + \Gamma^{i}_{ql} A^{il}_{k} + \Gamma^{j}_{ql} A^{il}_{k} \qquad (103.4)$$

حـ- من المعادلة *(101.4)* نجد أن:

$$A^{k}_{ij,q} = \frac{\partial A^{k}_{ij}}{\partial x^{q}} - \Gamma^{l}_{iq} A^{k}_{lj} - \Gamma^{l}_{jq} A^{k}_{il} + \Gamma^{k}_{lq} A^{l}_{ij} \qquad (104.4)$$

4.4 عمليات الموترات التفاضلية *Tensor differential operation*

في هذه الفقرة سنبين كيفية كتابة بعض المؤثرات *(Operators)* في تحليل المتجهات مثل تدرج كمية قياسية *(Gradient)* وتباعد دالة متجه *(divergence)* والتفاف دالة متجه *(Curl)* والمؤثر اللابلاسي *(Laplacian operator)* في صورة موترات.

أ – تدرج كمية قياسية:

يسمى الرمز $\vec{\nabla}$ مؤثر دل *(del operator)* ويكتب على الصورة التالية:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}^{i} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \qquad (105.4)$$

عندما يؤثر $\vec{\nabla}$ على كمية قياسية $\phi = \phi(x^i)$. ويطلق على المقدار $\vec{\nabla}\phi$ تدرج كمية قياسية وتعطى بالعلاقة الآنية:

$$grad\,\phi = \vec{\nabla}\,\phi = \hat{e}^i\ \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{106.4}$$

الكمية $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ سبق وأن تعرفنا عليها في المعادلة *(69.4)* واطلقنا عليها التفاضل الموافق للتغاير لكمية لازمة وهو موتر موافق للتغاير من الرتبة الأولى ويرمز له بـ $\phi_{,i}$. والموتر المصاحب له هو مخالف للتغاير يمكن ايجاده كما سبق وأن درسنا على الصورة:

$$\vec{\nabla}\,\phi = g^{k\,i}\ \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,\hat{e}_k \tag{107.4}$$

ب– تباعد دالة متجه *(divergence)*:

تباعد دالة متجه A^P يعرف على أنه اختزال أو انقباض *(Contration)* لتفاضل موافق للتغاير لكمية متجه $A^P_{,k}$ ويرمز له بـ $div\ A^P$ ويكتب على النحو:

$$div\,A^P = A^P_{,P} = \frac{\partial A^S}{\partial x^S} + \Gamma^P_{Ps}\ A^S \tag{108.4}$$

وبالتعويض عن قيمة رموز كريستوفل من النوع الثاني من المعادلة *(39.4)* يمكن إعادة كتابة المعادلة *(108.4)* على الصورة:

$$div\,A^P = A^P_{,P} = \frac{\partial A^S}{\partial x^S} + A^S\ \frac{\partial}{\partial x^S}\ \sqrt{g} \tag{109.4}$$

المعادلة (109.4) يمكن اختصارها لتأخذ الشكل العام لتباعد دالة متجه وتكتب على النحو التالي:

$$\vec{\nabla} . \vec{A} = div\, A^P = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^s}(\sqrt{g}\, A^s) \qquad (110.4)$$

مثال (13.4)

أوجد تباعد دالة متجه لـ A^P في الإحداثيات الاسطوانية؟

الحل:

مركبات الموتر المتري في الإحداثيات الاسطوانية تعطي على النحو: $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ و أما باقي المركبات

$g_{11} = 1$ و $g_{22} = \rho^2$ و $g_{33} = 1$

إذا محدد الموتر المتري بحسب على النحو:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \qquad (111.4)$$

من المعادلة (110.4) نجد أن:

$$div\, A^\rho = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\, A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\, A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\, A^3) \right] \qquad (112.4)$$

وحيث أن $x^1 = \rho$ و $x^2 = \phi$ وكذلك $x^3 = z$

وكذلك:

$$\left.\begin{aligned} A_\rho &= \sqrt{g_{11}}\, A^1 = A^1 \\ A_\phi &= \sqrt{g_{22}}\, A^2 = \rho\, A^2 \\ A_z &= \sqrt{g_{33}}\, A^3 = A^3 \end{aligned}\right\} \qquad (113.4)$$

وبالتعويض من *(113.4)* في المعادلة *(112.4)* نحصل على:

$$div\, A^\rho = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\, A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\, A_z)\right] \qquad (114.4)$$

حـ- المؤثر اللابلاس *Laplacian Operator* ∇^2 :

بأخذ تباعد دالة متجه للمعادلة *(107.9)* نحصل على العلاقة التالية:

$$\nabla^2 \phi = div\left(g^{ki} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) \qquad (115.9)$$

المعادلة السابقة يعاد صياغتها بالاستعانة بالمعادلة *(110.4)* فنحصل على صورة نهائية للمؤثر اللابلاسي في هيئة موتر على النحو التالي:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, g^{ki} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) \qquad (116.9)$$

المقدار الذي بين الأقواس يمثل موتراً مخالفاً للتغاير من الرتبة الأولى.

مثال *(14.4)*

اكتب المؤثر اللابلاسي في الإحداثيات الإسطوانية:

الحل:

مركبات الموتر المتري في هذه الإحداثيات تعطي على النحو:

$g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ وباقي المركبات هي: $g_{11} = 1$ و $g_{22} = \rho^2$ و $g_{33} = 1$

بإستخدام خواص الموتر المتري

$$g_{is}\, g^{ij} = \delta_s^l \qquad (117.4)$$

يمكن حل المعادلة السابقة لنحصل على:

$$g^{il} = \frac{G(j,l)}{g} \qquad (118.4)$$

حيث $G(j,l)$ هي محيددات المحدد g ومن المعادلة (118.4) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} g^{11} &= 1 \\ g^{22} &= 1/\rho^2 \\ g^{33} &= 1 \\ g &= \rho^2 \end{aligned}\right\} \qquad (119.4)$$

وبذلك من المعادلة (116.4) نحصل على:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}\, g^{11}\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}\, g^{22}\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}\, g^{33}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right) \qquad (120.4)$$

ويمكن تبسيط المعادلة السابقة بالإستعانة بالمعادلة (119.4) فنحصل على:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\left(\frac{\rho \partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (121.4)$$

د- مؤتر دوران دالة متجه ($curl\ \vec{A}$) :

يرمز لموتر دوران دالة متجه بـ($curl\ \vec{A}$) وهو موتر غير متماثل من الرتبة الثانية. ويعرف على النحو:

$$(curl\ \vec{A})_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i} \qquad (122.4)$$

بالتعويض عن قيمة التفاضل الموافق للتغاير $A_{i,j}$ و $A_{j,i}$ من المعادلة *(79.4)* في المعادلة *(122.4)* نحصل على المعادلة التالية:

$$(curl\ A)_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^q} - \Gamma^s_{iq} A_S - \frac{\partial A_k}{\partial x^q} + \Gamma^s_{ki} A_S \qquad (123.4)$$

بتغير تسمية الأدلة في الحدين الأخيرين $k \leftarrow q \leftarrow i$ وبإستخدام خاصية تماثل رموز كريستوفل [المعادلة *(9.4)*] تختصر المعادلة *(123.4)* على الصورة:

$$(Curl\ A)_{iq} = \frac{\partial A_i}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^i} \qquad (124.4)$$

هذه المعادلة تمثل الشكل العام لدوران (أو التفاف) دالة متجه في شكل موتر.

5.4 المشتقات الذاتية للمركبات الموافقة للتغاير (A_p)

The intrinsic derivaltive

يرمز للمشتقة الذاتية للمرَكبات الموافقة للتغاير A_P (وفي بعض الأوقات يطلق عليها كذلك المشتقة المطلقة للمركبات الموافقة للتغاير) حول منحنى

$x^q = x^q(t)$ (حيث t تمثل بارمتر) بالرمز $\frac{\partial A_P}{\partial t}$ وتعرف على أنها الضرب الداخلي بين التفاضل الموافق للتغاير مع $\frac{d x^q}{d t}$ وتكتب على الصورة:

$$\frac{\delta A_P}{\delta t} = A_{P,q} \frac{d x^q}{d t} = \left(\frac{\partial A_P}{\partial x^q} - \Gamma^r_{Pq} A_r \right) \frac{d x^q}{d t} \qquad (125.4)$$

ويمكن تبسيط المعادلة الأخيرة إلى

$$\frac{\delta A_P}{\delta t} = \frac{\partial A_P}{\partial t} - \Gamma^r_{Pq} A_r \frac{d x^q}{d t} \qquad (126.4)$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد المشتقة الذاتية للمركبات المخالفة للتغاير A^m على النحو التالي:

$$\frac{\delta A^m}{\delta t} = A^m_{,q} \frac{d x^q}{d t} = \frac{d A^m}{d t} + \Gamma^m_{qr} A^r \frac{d x^q}{d t} \qquad (127.4)$$

مثال *(15.4)*

أوجد المشتقة الذاتية لكمية قياسية $I = I(t)$

الحل:

من المعادلة *(125.4)* نجد أن:

$$\frac{\delta I}{\delta t} = I,k \frac{d x^k}{d t} \qquad (128.4)$$

وبالتعويض عن قيمة التفاضل الموافق للتغاير $I_{,k}$ في المعادلة (128.4) نحصل على:

$$\frac{\delta I}{\delta t}=\frac{\partial I}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}=\frac{dI}{dt} \qquad (129.4)$$

نلاحظ أن المشتقة الذاتية لكمية لازمة يتكافئ مع التفاضل الكلي لتلك الكمية.

مثال (16.4)

أوجد المشتقة المطلقة لمركبات الموتر المتري g_{ij}.

الحل:

من المعادلة (125.4) نجد أن المشتقة المطلقة لمركبات g_{ij} تعطي بالعلاقة:

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t}=g_{ij,q}\frac{dx^q}{dt} \qquad (130.4)$$

وبما أن $g_{ij,q}=0$ من المثال رقم (9.4) [المعادلة (91.4)]

إذاً يمكننا اختصار المعادلة (130.4) على الصورة:

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t}=0 \qquad (131.4)$$

تمارين (4)

1- اثبت أن

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [ij, k] + [kj, i]$$

2- احسب رموز كريستوفل من النوعين للمتريات:

أ - $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (x^1)^2 \sin^2 x^2 (dx^3)^3$

ب- $ds^2 = (dx^1)^2 + G(x^1, x^2)(dx^2)^2$

وحيث G دالة في x^1 و x^2.

3- اثبت أن

$$A^j{}_{,j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{\sqrt{g}\, A^r\right\}$$

4- احسب $div\, A^i$ و $\nabla^2 \phi$ في الإحداثيات الكروية؟

5- اثبت أن $g^{ij}, k = 0$ ؟

6- أوجد المشتقة الذاتية لكل من الكميات التالية (بفرض أنها قابلة للتفاضل بالنسبة لـ t):

أ - $g_{ik} A^k$ ب- $\delta^j_k A_j$ حـ- $g_{jk}\, \delta^j_r\, A^r_p$ د- A^{jk}_{lmn}

7- أوجد التفاضل الموافق للتغاير لكل من:

أ - $A^{jk}_{,q}$ ب - $A^j_{k\, l,q}$ حـ- $\left(g_{jk}\, A^{km}_n\right)_{,q}$

الفصل الخامس

الجيوديسيات والانحناء

Geodesics and Curvature

1.5 الجيوديسيات Geodesics

نحن نعلم من حسبان التغاير *(Calculus of Variation)* إنه في فضاء اقليدس ذي الثلاثة أبعاد أن الخط المستقيم هو المسار الذي يمثل أقصر مسافة بين نقطتين. هنا نود أن نعمم هذا المفهوم الأساسي لفضاءات أخرى مثل فضاءات ريمان.

ليكن، المنحنى $x^i = x^i(t)$ حيث t هو بارامتر يصل النقطتين الثابتتين P_0 ، P_1 واللتان تناظران قيم البارامتر t_0 ، t_1 على التوالي. الآن وكما سبق وأن نوهنا بالفصل الثالث أن المسافة S على طول المنحنى بين P_0 و P_1 هي:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e\, g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}}\; dt \qquad (1.5)$$

ولنعتبر كل المسارات التي تصل P_0 و P_1، فلو كانت المسافة P_0P_1 المقاسة على طول المنحنى مستقرة *(Stationary)* فإننا نسميها بجيوديسية *(geodsic)*.

فمثلاً: الخط المستقيم هو جيوديسية في المستوى، وقوس من دائرة عظمى (أو كبرى) على كره هو أيضاً جيوديسية، وهكذا... الخ.

هذا ونستطيع إيجاد المعادلات التفاضلية للجيوديسيات بإستعمال معادلات أويلر وهو الأسلوب المتبع في حسبان التغاير؛ إلاّ أننا سوف نقوم هنا بعمل ذلك انطلاقاً من أوليات بسيطة.

لنقم بإختيار متجه اختياري صغير δx^i يتغير بإستمرار على طول c ، عندئذٍ نعرف المعادلات $\bar{x}^i = x^i + \delta x^i$ والمنحنى $\bar{c}$ وهو منحنى بجوار المنحنى c، دعنا أيضاً نفترض أن $\delta x^i = 0$ عند النقطتين P_0 و P_1 ؛ وهذا يعني أن $\bar{c}$

يصل دائماً النقطتين المذكورتين، أيضاً تكون المسافة $\bar{S}$ الواصلة بين P_0 و P_1 على طول $\bar{c}$ هي:

$$\bar{S} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e\, g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt}}\; dt \qquad (2.5)$$

وحيث نرى أن $g_{ij}(\bar{x})$ هنا دوال في $\bar{x}^i$. مما تقدم نلاحظ أن:

$$g_{ij}(\bar{x}). \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt} = \left(g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k\right)\left(\frac{dx^i}{dt} + \frac{d}{dt}(\delta x^i)\right)$$

$$\left(\frac{dx^j}{dt} + \frac{d}{dt}(\delta x^j)\right) = g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2g_{ij} \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d}{dt}(\delta x^i)$$

$$+ \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) \qquad (3.5)$$

وحيث قمنا بإهمال الحدود من رتب أعلى من الرتبة الأولى؛ كما استخدمنا كون i و j متغيرات دمي للوصول إلى الحد

$$2\, g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt}(\delta x^j)$$

عليه فإن:

$$\sqrt{e\, g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt}} = \sqrt{e\, g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$$

$$\left[1 + \frac{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt}(\delta x^j) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\right] \qquad (4.5)$$

لاحظ أننا استخدمنا مفكوك ذي الحدين للوصول إلى *(4.5)* وهكذا وانطلاقاً من *(1.5)* و *(2.5)* يكون التغير في الطول δs من المنحنى c إلى المنحنى $\bar{c}$ يعطي على الصورة:

وحيث أن t بارامتر على المنحنى، فإنه يمكننا إختيار s وهو المسافة القوسية على طول c على أنه هذا البارامتر، بذلك نحصل على:

$$\delta s = \bar{s} - s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{d}{dt}(\delta x^j) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\partial x^k \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\sqrt{e g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}} dt \quad (5.5)$$

وللوصول إلى (5.5) إستعملنا $e^2 = 1$.

أي أن:-

$$\delta s = \int_{s_0}^{s_1} \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x^j) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \right] ds \quad (6.5)$$

ولقد استخدمنا العلاقة *(1.5)* للوصول إلى العلاقة *(6.5)* والعلاقة *(1.5)* يمكن في الحقيقة وضعها على الصورة:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{e g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}} \quad (7.5)$$

وقيم البارامتر القوسي s_0 و s_1 هي تلك المناظرة للنقطتين P_0 ، P_1.

نكامل الآن الحد الأول بالتجزئي لنحصل على:

$$s = \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} \delta x^j \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right] ds \tag{8.5}$$

ولكن وحسب معطيات المسألة $\delta x^i = 0$ عند P_0 و P_1 وبذلـك فـإن الحـد الأول بالطرف الأيمن بالعلاقة (8.5) يتلاشى؛ أيضاً نرى أن:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \right) = g_{ij} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

$$= g_{ij} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{9.5}$$

وللوصول إلى العلاقة الأخيرة هذه استخدمنا كون g_{ij} دالـة في x^k وأن i و k متغيرات دمي وعلى هذا فإن:

$$\delta s = - \int_{s_0}^{s_1} \delta x^j \left[g_{ij} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + [ik, j] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right] ds \tag{10.5}$$

وحيث $[ik, j]$ هو رمز كريستوفل من النوع الأول كما سـبق وتم تعريفـه في الفصل السابق.

الآن في المعادلة (10.5) نرى أن δx^i متغـيرات عشـوائية وبذلـك نصـل إلى النتيجة المهمة الموالية وهي:

(لكي يكون المنحنى c جيوديسبة فإن الشروط الضروريـة والكافيـة لذلـك هي:

$$g_{ij}\,\frac{d^2 x^i}{d s^2} + [ik\,,j]\,\frac{d x^i}{d s}\,\frac{d x^k}{d s} = 0 \qquad (11.5)$$

والصيغة *(11.5)* هي من النوع موافق التغاير).

وبإجراء الضرب الداخلي في g^{jl} نحصل على الصيغة المماثلة مخالفة التغاير وهي:

$$\frac{d^2 x^l}{d s^2} + \Gamma^l_{ik}\,\frac{d x^i}{d s}\,\frac{d x^k}{d s} = 0 \qquad (12.5)$$

لاحظ إننا استعملنا العلاقة $g_{ij}\,g^{jl} = \delta^l_i$ للوصول للعلاقة *(12.5)*.

وأي من العلاقتين *(11.5)* أو *(12.5)* تمثل المعادلات التفاضلية للجيوديسية. وهي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية، وحلولها $x^i = x^i\,(s)$ تستوجب توفر شروط ابتدائية أي توفر القيم الابتدائية لـ x^i و $\frac{d x^i}{d s}$ عندئذ تكون هذه الحلول وحيدة *(unique)* . وهذا يعني تواجد جبوديسية وحيدة باتجاه معطى عند أي نقطة في الفضاء.

ولتوضيح ذلك نلاحظ أنه قد عرفنا الجيوديسية بدلالة المنحنى المار خلال نقطتين؛ ولكن هذه الجيوديسية ربما لا تكون وحيدة، إلاّ إذا كانت النقطتين قريبتين قرباً كافياً من بعضهما البعض. ومسألة الوحدانية تتعلق بالخواص التوبولوجية للفضاء V_N. ننوه مثلاً أنه لو أخذنا نقطتين على كرة كانتا عند نهايتي قطرها فإن كل الدوائر العظمى الواصلة بين هاتين النقطتين تمثل جيويسبات [وبذلك فإن الجيوديسية هنا ليست وحيدة].

مثال (1.5)

في فضاء اقليدس وفي الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة، اثبت أن الجيوديسيات هي عبارة عن خطوط مستقيمة.

الحل:

هنا $x^1 = x$ و $x^2 = y$ و $x^3 = z$ و $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ بينما $g_{ii} = 1$ ، وعليه فإن رموز كريستوفل كلها تساوي الصفر وبذلك تؤول المعادلات التفاضلية (11.5) إلى المعادلات:

$$g_{ij} \frac{d^2 x^i}{d s^2} = 0 \qquad \text{أو أن} \qquad \frac{d^2 x^i}{d s^2} = 0$$

وهذه حلها هو:

$$x^i = a^I s + b^I$$

وهي معادلات الخط المستقيم.

مثال (2.5)

أعد حل المثال السابق بإستخدام معادلات أويلر من حسبان التغاير وذلك بإعتبار أن المسألة في بعدين $(N = 2)$.

الحل:

حيث أن:

$$d s = \sqrt{(d x^1)^2 + (d x^2)^2}$$

عليه فإن:

$$f(x^2, \frac{dx^2}{dx^1}, x^1) = \sqrt{1+\left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2}$$

وبالتالي فإن تطبيق معادلة أويلر التي تفيد بأن:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{d}{dx^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) = 0$$

يعطينا

$$-\frac{d}{dx^1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2}}\right] = 0$$

ومنهـا نجـد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2}} = \text{ثابت}$$

أو أن: $\frac{dx^2}{dx^1} = \alpha$ وحيث α هو ثابت وبذلك فإن:

$$x^2 = \alpha x^1 + \beta$$

أيضا β ثابت وهذا يفيد بأننا حصلنا علـى خـط مستقيم، أي أن معادلـة أويلر تنبأ بأن أقصر مسافة بين نقطتين ثابتين هو خط مستقيم.

الآن لو استذكرنا العلاقة

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=e \qquad (13.5)$$

على أي قطعة من منحنى غير متلاشي، فإنه بالتفاضل نحصل على:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)=\frac{\delta}{\delta s}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)=2g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) \qquad (14.5)$$

مرة أخرى استخدمنا، هنا كون i و j متغيرات دمي. ومن المعادلة *(12.5)* [معادلة الجيوديسي] نرى أن:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)=0 \qquad (15.5)$$

وهذا يفيد بأن: الطرف الأيمن للمعادلة *(15.5)* يساوي صفراً عند كل النقاط على الجيوديسي وهكذا فإن المؤشر e لا يمكن أن يتغير بشكل فجائي على طول الجيوديسي، وهذا بدوره يؤدي إلى أن المتجه المماسي إذا لم يكن متلاشياً عند أي نقطة على الجيوديسي فإنه لن يكون كذلك على أي نقطة أخرى.

من جهة أخرى لو أن الاتجاه الأصلي (الابتدائي) كان متلاشياً؛ عندئذ فإن المنحنى يكون متلاشياً ولا يمكن أن نعتد بالمسافة القوسية على أنها البارامتر الذي نعمل به وبدلاً من ذلك فإننا نعرف الجيوديسي المتلاشي *(null geodesic)* على أنه ذلك المنحنى المتلاشي $x^i = x^i(t)$ الذي يحقق المعادلات:

$$\frac{d^2x^l}{dt^2}+\Gamma^l_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (16.5)$$

والشرط أن الجيوديسي المتلاشي هو منحنى متلاشي شرط ضروري إلا أنه ليس بكاف؛ وهذا يعني أن المنحنى المتلاشي ليس بالضرورة أن يكون جيوديسيا متلاشياً فمثلاً في V_4 العنصر الخطي:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 (dx^4)^2 \qquad (17.5)$$

ونرى أن الجيوديسيات المتلاشية تحقق المعادلات:

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} = 0 \qquad (18.5)$$

ذلك لأن

$$\Gamma^l_{ik} = 0$$

للعنصر الخطي المعطى.

الآن نسأل السؤال المهم التالي:

(هل يمكن اختيار منظومة إحداثيات ما بحيث تكون رموز كريستوفل كلها مساوية للصفر عند نقطة معينة؟).

للإجابة على هذا السؤال دعنا نأخذ في الاعتبار المنظومة العلامة التالية x^i والتي تأخذ القيم x^i_0 عند نقطة ما P_0 ولنقدم للمنظومة الجديدة المعرفة على النحو:

$$\bar{x}^i = x^i - x^i_0 + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{mn}\right)_0 (x^m - x^m_0)(x^n - x^n_0) \qquad (19.5)$$

لاحظ أن الصفر بالكميات x^i ليس بدليل تحتي وإنما يعني قيم هذه الكميات عند النقطة P_0 ، كما يجب أخذ الحيطة أن هذا الدليل لا معنى له من وجهة النظر الموترية وأن الجمع الإصطلاحي لا ينطبق عليه.

الآن بتفاضل *(19.5)* نسبة إلى x^i نحصل على

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i} = \delta^i_j + \left(\Gamma^i_{j\,n}\right)_0 (x^n - x^n_0) \qquad (20.5)$$

لاحظ أننا توصلنا إلى العلاقة *(20.5)* من خلال ملاحظة أن:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (x^m - x^m_0)(x^n - x^n_0) = (x^n - x^n_0)\,\delta^m_j + (x^m - x^m_0)\,\delta^n_j \qquad (21.5)$$

ومن ثم استعمال خصائص دلتا كرونكر وأن m و n هي متغيرات دمي:

ومن العلاقة *(20.5)* نجد أن:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i}\right) = \delta^i_j$$

وهـذا يعـني أن محـدد الجـاكوبي $0 \neq \left|\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i}\right)_0\right|$ ؛ أي أن التحويلـة *(19.5)* يمكن القيام بها حول النقطة P_0 (أي يقربها).

بضرب المعادلة *(20.5)* ضرباً داخلياً في $\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$ نحصل على:

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left(\Gamma^i_{jn}\right)_0 (x^n - x^n_0)\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \qquad (22.5)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى $\bar{x}^h$ نجد أن:

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} + \left(\Gamma^i_{jn}\right)_0 \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left(\Gamma^i_{jn}\right)_0 (x^n - x^n_0) \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \quad (23.5)$$

وعند P_0 وكما اسلفنا نرى أن $\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_0 = \delta^i_k$ ؛ وبالتالي فإن:-

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}\right)_0 = -\left(\Gamma^i_{jn}\right)_0 \delta^i_h \delta^j_k = -\left(\Gamma^i_{kh}\right)_0 \quad (24.5)$$

ومن خلال تحويلات رموز كريستوفل والتي تفيد بأن:

$$\bar{\Gamma}^P_{lm} = \Gamma^s_{ij} \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} + \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} \quad (25.5)$$

وبالإستعانة بالعلاقة *(24.5)* نجد أن:-

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Gamma}^P_{lm}\right)_0 &= \left(\Gamma^s_{ij}\right)_0 \delta^P_s \delta^i_l \delta^j_m - \delta^P_j \left(\Gamma^j_{lm}\right)_0 \\ &= \left(\Gamma^P_{lm}\right)_0 - \left(\Gamma^P_{lm}\right)_0 = 0 \end{aligned} \quad (26.5)$$

وهكذا استطعنا الوصول إلى منظومة إحداثيات جديدة $\bar{x}^i$ بحيث تكون قيم رموز كريستوفل مساوية للصفر عند أي نطقة P_0. هذه المنظومة من الإحداثيات تسمى بالإحداثيات الجيوديسية *(Geodesic co-ordinates)* ؛ كما أن النقطة التي تتلاشى عندها رموز كريستوفل تسمى بالقطب *(Pole)*.

مثال (3.5)

بإستخدام خواص الموترات ومنظومة إحداثيات جيوديسية، اثبت صحة قانون الضرب في حالة الإشتقاق موافق التغاير.

الحل:

بإعتبار الموتر $(A_{ij}B^i)_{,m} = A_{ij,m}B^i + A_{ij}\ B^i_{,m}$

واعتبار منظومة إحداثيات جيوديسية قطبها عند P_0 (أي نقطة P_0) ؛ عندئذ تكون المشتقات موافقة التغاير عند P_0 هي نفسها المشتقات الجزئية المماثلة. ولكن للمشتقات الجزئية يتحقق القانون:

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = \frac{\partial f}{\partial t}g + f\frac{\partial g}{\partial t}$$

أي أن الموتر أعلاه يساوي الصفر عند P_0 في الإحداثيات الجيوديسية؛ ومن خواص الموترات المذكورة بالفصل الأول يكون الموتر أعلاه مساوياً للصفر عند P_0 بأي منظومة إحداثيات أخرى. و P_0 هي أي نقطة (نقطة عامة)، عليه فإن الموتر أعلاه يساوي الصفر عند كل النقاط في V_N،

أي أن:-

$$(A_{ij}B^j)_{,m} = A_{ij,m}B^j + A_{ij}\ B^j_{,m}$$

وهو قانون الضرب المطلوب إثبات صحته.

2.5 التوازي Parallelism

سوف نتعرف هنا في عجالة لمفهوم التوازي وهي خاصية مهمة ومألوفة في فضاءات اقليدس. ففي الإحداثيات الكارتيزية نذكر بأن حقلاً متوازياً من المتجهات A_i يمكن الحصول عليه في فضاء اقليدس إذا كانت مركباته (A_i) ثابتة. وهذا يعني أن $\frac{d A_i}{d t} = 0$ ؛ أو أن $\frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0$. وحيث أن رموز كريستوفل تساوي الصفر هنا؛ عليه يمكننا كتابة هذه المعادلات على النحو $\frac{\delta A_i}{\delta t} = 0$ أو على النحو $A_{i,j}$ والتي تمثل شروط التوازي في شكل موتري.

لتعميم هذه الخاصية، دعنا نركز على المشتقة الذاتية $\frac{\delta A_i}{\delta t}$ وتعطى التعريف التالي:

أن A_i تكون مجالاً من المتجهات المتوازية على طول المنحنى $x^i = x^i(t)$ إذا ما حققت المعادلات التفاضلية:

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{d A_i}{d t} - \Gamma^l_{ik} A_l \frac{d x^k}{d t} = 0 \qquad (27.5)$$

وهذه مجموعة من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عددها N ؛ وبذلك فإن المتجه $\underline{A}$ ، إذا ما أعطى عند أي نقطة على المنحنى، يعين وبشكل وحيد لكل النقاط الأخرى على المنحنى.

وهذا ما يمكن التعبير عنه على النحو التالي:

(إن مجالاً من المتجهات المتوازية يمكن الحصول عليه من متجه معطى بالإنتشار المتوازي على طول المنحنى).

ويمكننا أيضاً كتابة شروط التوازي على طول منحنى على الصورة مخالفة التغاير على النحو:

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{d A^i}{d t} + \Gamma^i_{jk} A^j \frac{d x^k}{d t} = 0 \qquad (28.5)$$

مثال (4.5)

اثبت أن قيم متجهات مجال متوازي ثابتة.

الحل:

حيث أن: $A^2 = e_{(A)} g_{ij} A^i A^j$

وبتفاضل هذه الكمية نحصل على:

$$A \frac{d A}{d t} = \frac{1}{2} \frac{d}{d t} (e_{(A)} g_{ij} A^i A^j) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} (e_{(A)} g_{ij} A^i A^j)$$

$$= e_{(A)} g_{ij} \frac{\delta A^i}{\delta t} A^j$$

ومن المعادلة (28.5) نرى أن $\frac{\delta A^i}{\delta t} = 0$ لمجالات المتجهات المتوازية، وهذا يعني أن $A \frac{d A}{d t} = 0$ أو أن $\frac{d A}{d t} = 0$؛ أي أن A مقدار ثابت.

مثال (5.5)

في V_2 وإذا كان $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ فأثبت أن المتجه المتحصل عليه عند نقطة P_2 بالانتشار المتوازي من النقطة P_1 يعتمد على المنحنى الواصل بين النقطتين.

الحل:

لو اعتبرنا أن $\theta = x^1$ و $\phi = x^2$ فإن رموز كريستوفل التي لاتساوي الصفر هي $\Gamma^1_{12} = -\sin\theta\cos\theta$ و $\Gamma^2_{12} = \cot\theta$ ؛ ولنأخذ المنحنى الذي سنقوم عليه بالإنتشار المتوازي هو $\theta = \alpha$ (دائرة صغيرة)؛ عندئذ على هذه الدائرة. $\frac{d\theta}{dt} = 0$ وبذلك فإن شرط التوازي (28.5) يعطينا:

$$\frac{dA^2}{dt} + \cot\alpha A^1 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dA^1}{d\varphi} \cos\alpha\sin\alpha A^2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$A^2 = c\cos(\phi\cos\alpha) - d\sin(\phi\cos\alpha)\ ,$$
$$A^1 = \sin\alpha\,[c\sin(\phi\cos\alpha) + d\cos(\phi\cos\alpha)]$$

(c و d ثابتان) ؛ الآن لو أن $\underset{\sim}{A} = (1, 0)$ عند النقطة المعرفة بـ $\phi = 0$ فـإن $c = 0$ و $d = \csc\alpha$ و $\underset{\sim}{A}$ الجديد هو:

$$\underset{\sim}{A} = (\cos(\phi\cos\alpha)\,,\ -\sin(\phi\cos\alpha)/\sin\alpha)$$

وهكـذا فإن الانتشار، المتوازي على طـول تلك الدائرة الصغيرة يعطيـنا $\underset{\sim}{A} = (\cos (2\pi\cos\alpha)$ و $- \sin(2\pi\cos\alpha)/\sin\alpha)$ وهـذا يختلـف عـن A الأصل $[(1,0)]$. هـذا يعـني أن $\underset{\sim}{A}$ تعتمـد علـى α أي علـى المنحنـى المختـار. لاحظ أيضاً أنــه في حالـة العمـل بدائـرة عظمـى $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ يـؤدي الإنتشـار المتوازي إلى نفس المتجه الأصلي الذي بدأنا به.

3.5 موتر الانحناء لكريستوفل وريمان

قبل البدء بتعريف موتر الانحناء لابد لنـا أولاً مـن التعـرف إلى موتـر ريمـان وكريستوفل R^l_{jnP} وهو:

$$R^l_{jnP} = \frac{\partial}{\partial x^n}\Gamma^l_{jP} - \frac{\partial}{\partial x^P}\Gamma^l_{jn} + \Gamma^l_{ns}\Gamma^s_{jP} - \Gamma^l_{Ps}\Gamma^s_{jn} \quad (29.5)$$

وحيث نرى أنه يعتمد على الموتـر الأساسـي g_{ij} ومشـتقاته حتـى الدرجـة الثانية كما أن R^l_{jnP} يرتبط بأي متجه $\underset{\sim}{A}$ بالعلاقة:

$$A_{j,nP} - A_{j,Pn} = R^l_{jnP} A_l \quad (30.5)$$

وحيث $A_{j,nP}$ تمثل الاشـتقاق موافـق التغـاير للمتجـه A_j. ويمكـن الوصـول للصيغة (30.5) على النحو التالي:

ليكن A_j أي متجه، عندئذ المشتقة موافقة التغاير هي:

$$A_{j,n} = \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \Gamma^l_{jn} A_l \quad (31.5)$$

بالاشتقاق موافق التغاير مرة أخرى لكميات $A_{j,n}$ نحصل على:-

$$A_{j,nP} = \frac{\partial}{\partial x^P} (A_{j,n}) - \Gamma^l_{jP} A_{l,n} - \Gamma^l_{np} A_{j,l} \qquad (32.5)$$

وبالتعويض عن $A_{j,n}$ من (31.5) في (32.5) نجد أن:-

$$A_{j,nP} = \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^n \partial x^P} - \Gamma^l_{jn} \frac{\partial A_l}{\partial x^P} - A_l \frac{\partial}{\partial x^P} \Gamma^l_{jn} - \Gamma^l_{jP} \frac{\partial A_l}{\partial x^n}$$

$$+ \Gamma^l_{jP} \Gamma^k_{ln} A_k - \Gamma^l_{jp} \frac{\partial A_j}{\partial x^l} + \Gamma^l_{np} \Gamma^k_{jl} A_k \qquad (33.5)$$

الآن بإستبدال P, n [مع مراعاة الأدلة الدمي وإعادة تسميتها عند اللزوم] وبالطرح نحصل على:

$$A_{j,nP} - A_{j,Pn} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^l_{jp} - \frac{\partial}{\partial x^P} \Gamma^l_{jn} + \Gamma^l_{ns} \Gamma^s_{jP} - \Gamma^l_{Ps} \Gamma^s_{jn} \right\} A_l \quad (34.5)$$

وحيث أن A_l هو متجه اختياري ومن قانون القسمة نستنتج أن الكمية ما بين القوسين { } موتر وهي بالضبط، حسب التعريف المقدم ببداية هذا البند، موتر ريمان وكريستوفل وهكذ وصلنا إلى البرهان المطلوب. وإذا كان هذا الموتر يساوي الصفر فإن:-

$$A_{j,nP} = A_{j,Pn} \qquad (35.5)$$

وهذا يعني أن كون موتر ريمان وكريستوفل مساوياً للصفر هو شرط ضروري وكاف لكي يكون الاشتقاق موافق التغاير، لكل المتجهات، تبديلياً.

الآن من التعريف (29.5) ومن خواص رموز كريستوفل نلاحظ أن

$$R^{l}_{jnP} = -R^{l}_{jnP} \qquad (36.5)$$

أي أن R^{l}_{jnP} ملتوي التماثل بالنسبة للأدلة n و P.

مثال (6.5)

أثبت أن $R^{l}_{jnP} + R^{l}_{nPj} + R^{l}_{Pjn} = 0$

الحل:

حيث أن

$$R^{l}_{jnp} = \frac{\partial}{\partial x^{n}} \Gamma^{l}_{jp} - \frac{\partial}{\partial x^{P}} \Gamma^{l}_{jn} + \Gamma^{l}_{ns} \Gamma^{s}_{jp} - \Gamma^{l}_{ps} \Gamma^{s}_{jn}$$

و

$$R^{l}_{npj} = \frac{\partial}{\partial x^{p}} \Gamma^{l}_{nj} - \frac{\partial}{\partial x^{j}} \Gamma^{l}_{np} + \Gamma^{l}_{ps} \Gamma^{s}_{nj} - \Gamma^{l}_{js} \Gamma^{s}_{np}$$

و

$$R^{l}_{pjn} = \frac{\partial}{\partial x^{j}} \Gamma^{l}_{pn} - \frac{\partial}{\partial x^{n}} \Gamma^{l}_{pj} + \Gamma^{l}_{js} \Gamma^{s}_{pn} - \Gamma^{l}_{ps} \Gamma^{s}_{jn}$$

وبالجمع مع مراعاة تماثل رموز كريستوفل بالنسبة للأدلة السفلية والذي ينص على $\Gamma^{l}_{jp} = \Gamma^{l}_{pj}$ ، نحصل على المطلوب.

ونعرف الآن موتر الانحناء موافق التغاير *(Covariant curvature tensor)* على النحو:-

$$R_{rjnp} = g_{rl}\, R^{l}_{jnp} \tag{37.5}$$

وهذه يمكن كتابتها بشئ من التفصيل بإستخدام رموز كريستوفل من النوعين على النحو التالي:

بإستعمال *(37.5)* و *(29.5)* نحصل على:

$$\begin{aligned} R_{rjnp} &= g_{rl}\left[\frac{\partial}{\partial x^{n}}\Gamma^{l}_{jp} - \frac{\partial}{\partial x^{p}}\Gamma^{l}_{jn} + \Gamma^{l}_{ns}\Gamma^{s}_{jp} - \Gamma^{l}_{ps}\Gamma^{s}_{jn}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{n}}\left[g_{rl}\Gamma^{l}_{jp}\right] - \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^{n}}\Gamma^{l}_{jp} - \frac{\partial}{\partial x^{p}}\left[g_{rl}\Gamma^{l}_{jn}\right] \\ &+ \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^{n}}\Gamma^{l}_{jn} + g_{rl}\,\Gamma^{l}_{ns}\Gamma^{s}_{jp} - g_{rl}\Gamma^{l}_{ps}\Gamma^{s}_{jn} \end{aligned} \tag{38.5}$$

بعدئذٍ نستخدم العلاقات بين رموز كريستوفل من النوع الأول والثاني لنحصل على:

$$R_{rjnp} = \frac{\partial}{\partial x^{n}}[jp,r] - \frac{\partial}{\partial x^{p}}[jn,r] + \Gamma^{l}_{jn}[rp,l] - \Gamma^{l}_{jp}[rn,l] \tag{39.5}$$

وبإستعمال صيغة الرموز *[jp , r]* بدلالة الموتر الأساسي نجد أن:-

$$\begin{aligned} R_{rjnp} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^{2} g_{rp}}{\partial x^{j}\partial x^{n}} + \frac{\partial^{2} g_{in}}{\partial x^{r}\partial x^{p}} - \frac{\partial^{2} g_{rn}}{\partial x^{j}\partial x^{p}} - \frac{\partial^{2} g_{jp}}{\partial x^{r}\partial x^{n}}\right\} \\ &+ g^{tS}\{[jn,s][rp,t] - [jp,s][rn,t]\} \end{aligned} \tag{40.5}$$

ونلاحظ مرة أخرى أننا استخدمنا العلاقات بين رموز كريستوفل من النوعين الأول والثاني للوصول إلى الصيغة *(40.5)*.

مثال (7.5)

أثبت أن:-

أ - $R_{rjnp} = -R_{jrnp}$

ب- $R_{rjnp} = -R_{rjpn}$

حـ- $R_{rjnp} = +R_{nprj}$

د- $R_{rjnp} + R_{rnpj} + R_{rpjn} = 0$

الحل:

الحل هنا يكمن في كتابة عنـاصر موتـر الانحنـاء بإسـتخدام الصيغـة (40.5) ومن تم استخدام تماثل الموتر الأساسي فمثلاً بالنسبة للفقرة.

ب- نرى أن

$$R_{rjnp} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^j \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^r \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{rp}}{\partial x^j \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^r \partial x^p}\right)$$

$$+ g^{tS}([jp, s][rn, t] - [jn, s][rp, t])$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{rp}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^r \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^j \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^r \partial x^n}\right)$$

$$+ g^{tS}([jn, s][rp, t] - [jp, s][rn, t])$$

$$= -R_{rjnp}$$

4.5 موتر ريتشي Ricci Tensor

هنا نستخدم خاصية الإنقباض ونعرف موتر رتيشي من خلال العلاقة:-

$$R_{jn} = R^l_{jnl} = g^{ls} R_{sjnl} \qquad (41.5)$$

وبإجراء عملية الانقباض على l و P في (29.5) واستخدام العلاقة:

$$\Gamma^{i}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^{j}}\left\{ log\sqrt{|g|} \right\} \qquad (42.5)$$

نحصل على:

$$R_{jn} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{j}\partial x^{n}} \left\{ log\sqrt{|g|} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{l}}\Gamma^{l}_{jn} + \Gamma^{l}_{ns}\Gamma^{s}_{jl} - \Gamma^{s}_{jn}\frac{\partial}{\partial x^{s}} \left\{ log\sqrt{|g|} \right\} \right) \qquad (43.5)$$

ومن هذه الصيغة يتضح أن R_{jn} متماثل في j و n.

وانطلاقاً مما تقدم نعرف لا متغير الانحناء *(Curvature Invariant)* على الصورة:

$$R = g^{jn} R_{jn} \qquad (44.5)$$

ولو حدث لفضاء ما أن كان $R_{ij} = Ig_{ij}$ لكل النقاط وحيث I كمية لازمة (أو لا متغيرة)، فإن الفضاء يسمى بفضاء آينشتين.

أي أن موتر رتيشي بفضاء آينشين، يكون معطى على الشكل:

$$R_{ij} = I\, g_{ij} \qquad (45.5)$$

ولو قمنا بالضرب الداخلي لهذا الموتر في g^{ij} فإننا نحصل على:

$$R = g^{ij} R_{ij} = I\, g^{ij} g_{ij} \qquad (46.5)$$

ومن خواص الموتر الأساسي نحن نعلم بأن:

$$N = g^{ij}\, g_{ij} \qquad (47.5)$$

وبذلك فإن:

$$R = N\,I \qquad (48.5)$$

وهكذا فإنه لفضاء آينشتين نحصل على:

$$R_{ij} = \frac{1}{N}\, R\, g_{ij} \qquad (49.5)$$

5.5 متطابقة بيانكي *Bianchi's Identity*

لو قمنا بإختيار منظومة إحداثيات جيوديسية وقمنا بإشتقاق موافق للتغـاير للعلاقة *(29.5)* لحصلنا على

$$R^l_{jnp,r} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(R^l_{jnp}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^r\, \partial x^n}\Gamma^l_{jp} - \frac{\partial^2}{\partial x^p\, \partial x^r}\Gamma^l_{jn} \qquad (50.5)$$

وبالتبديل الدوري للأدلة *{n , p , r}* نحصل على:

$$R^l_{jpr,n} = \frac{\partial^2}{\partial x^n\, \partial x^p}\ \Gamma^l_{jr} - \frac{\partial^2}{\partial x^r\, \partial x^n}\Gamma^l_{jp} \qquad (51.5)$$

و

$$R^l_{jrn,p} = \frac{\partial^2}{\partial x^r\, \partial x^p}\ \Gamma^l_{jn} - \frac{\partial^2}{\partial x^n\, \partial x^p}\Gamma^i_{jr} \qquad (52.5)$$

وبجمع المعادلات *(50.5) – (52.5)* نحصل على المعادلـة الموتريـة الـتي تنـص على:

$$R^{l}_{jnp,r} + R^{l}_{jpr,n} + R^{l}_{jrn,p} = 0 \qquad (53.5)$$

وهي صالحة عند أي قطب لمنظومة احداثيات جيوديسية.

ومن معلوماتنا السابقة تكون المعادلة (53.5) صالحة لكل منظومة احداثيات جيوديسية عند ذلك القطب. ولكن يمكننا دائماً اختيار أي نقطة كقطب لمنظومة إحداثيات جيوديسية؛ هذا يعني بالطبع أن (53.5) صالحة لكل النقاط في الفضاء.

الآن بضرب (53.5) ضرباً داخلياً في g_{lm} نجد أن:

$$R_{mjn,r} + R_{mjpr,n} + R_{mjrn,p} = 0 \qquad (54.5)$$

والعلاقة (54.5) هي ما نسميها بمتطابقة بيانكي.

نعود مرة أخرى لموتر ريتشي وإلى (لا متغير الانحناء) ونعرف الموتر:-

$$G^{i}_{j} = g^{il} R_{jl} - \frac{1}{2} R \delta^{i}_{j} \qquad (55.5)$$

وهو موتر يسمى بموتر آينشتين.

بالضرب الداخلي لمتطابقة بيانكي [(54.5)] في $g^{mp}\, g^{in}$، وبإستخدام تعريف موتر ريتشي [(41.5)] وتعريف لا متغير الانحناء [(44.5)] وخواص التواء التماثل لموتر الانحناء نتوصل إلى:

$$R_{,r} - g^{jn} R_{jr,n} - g^{mp} R_{mr,p} = 0 \qquad (56.5)$$

وحيث أن الدليل m هو متغير دمية فإن $g^{jn} g_{jr,n} = g^{mp} R_{mr,p}$ وهذا يعني أن:

$$R_{,r} = 2\, g^{jn} R_{jr,n} \qquad (57.5)$$

بالرجوع لموتر آينشتين وبالتفاضل تفاضلاً موافق التغاير نحصل على:

$$G^i_{j,i} = g^{il} R_{jl,i} - \frac{1}{2} R_{,i}\, \delta^i_j = g^{il} R_{jl,i} - \frac{1}{2} R_{,j} = 0 \qquad (58.5)$$

وحيث استخدمنا العلاقة *(57.5)* للوصول إلى العلاقة *(58.5)* وهكذا نرى أن:

$$G^i_{j,i} = 0 \qquad (59.5)$$

ننوه أن المعادلة الأخيرة هي من المعادلات المهمة في النظرية النسبية.

6.5 مواضيع متفرقة

أ – إنحناء ريمان ***Riemannian***

لو اعتبرنا متجهين A^i و B^i عند نقطة في V_N واعتبرنا التحويلات الخطية:

$$x^i = \lambda A^i + \mu B^i$$
$$y^i = \rho A^i + \sigma B^i \qquad (60.5)$$

وحيث σ ، ρ ، μ ، λ كميات لازمة؛ وقمنا بحساب الكمية:-

$$I = (g_{rn}\, g_{jp} - g_{rp}\, g_{jm})\, x^r x^n y^j y^p$$

فإننا نحصل على:

$$I = (\lambda A_n + \mu B_n)(\lambda A^n + \lambda B^n)(\rho A_p + \sigma B_p)(\rho A^p + \sigma B^p)$$
$$- (\lambda A_p + \mu B_p)(\rho A^p + \sigma B^p)(\lambda A_j + \mu B_j)(\rho A^j + \sigma B^j) \quad (61.5)$$

ومن تعريف مقدار متجه والزاوية بين متجهين نرى أن:

$$I = (e_A \rho^2 A^2 + e_B \mu^2 B^2 + 2\lambda \mu \cos\theta \, A B)$$
$$(e_A \rho^2 A^2 + e_B \sigma^2 B^2 + 2\rho \sigma \cos\theta A B)$$
$$- (e_A \lambda \rho A^2 + e_B \mu \sigma B^2 + [\lambda \sigma + \rho \mu] \cos\theta AB)^2$$
$$= (\lambda\sigma - \mu\rho)^2 (e_A e_B - \cos^2\theta) A^2 B^2$$
$$= (\lambda \sigma - \mu \rho)^2 (g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}) A^r A^n B^j B^p \quad (62.5)$$

وحيث θ هي الزاوية بين المتجهين A^i و B^i ؛ لاحظ أيضاً أن:

$$R_{rjnp} X^r X^n Y^j Y^P = (\lambda \sigma - \rho \mu)^2 R_{rjnp} A^r A^n B^j B^P \quad (63.5)$$

وبذلك نرى من المعادلتين (62.5) و (63.5) أن

$$k = \frac{R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p}{(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}) A^r A^n B^j B^p} \quad (64.5)$$

كمية لازمة (أو لا متغيرة) ولا تتغير عند نقطة ما عندما يتم استبدال A^i و B^i بأي تركيبة خطية منهما و تسمى k بإنحناء ريمان للفضاء V_n المرتبط بالمتجهين A^i و B^i.

ولو أن A^i و B^i هنا متجهات وحدة متعامدة فإن مقام k يساوي الواحد الصحيح.

مثال (8.5)

اثبت أن $k = \frac{R_{1212}}{g}$ للفضاء V_2.

الحل:

عند أي نقطة في V_2 يوجد متجهان أثنان (فقط) مستقلان خطياً ويمكن اختيارهما على أنهما $(1,0)$ و $(0,1)$ ، عندئذ k تكون وحيدة وتساوي $k = \frac{R_{1212}}{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}$ ، لاحظ أن $A^1 = 1$ و $A^2 = 0$ و $B^1 = 0$ و $B^2 = 1$ ، ولهذا لا نحصل إلا على الحد R_{1212} ولكن

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2$$ وبذلك فإن $$k = \frac{R_{1212}}{g}$$

ب- الفضاء المسطح **(Flat space)**

يكون الفضاء مسطحاً (أو مستوياً) إذا ما كان $k = 0$ وهذا يعني أن الفضاء يكون مسطحاً إذا ما تحققت المعادلة:-

$$R_{rjnp}\,A^r A^n B^j B^P = 0 \qquad (65.5)$$

لكل المتجهات A^i و B^i.

الآن بملاحظة أن $A^r A^n = A^n A^r$ و $B^j B^P = B^P B^j$

و $A^r A^n B^j B^P = B^j B^P A^r A^n$

وحيث أن A^i و B^i اختيارية، نرى من المعادلة (65.5) أن:-

$$R_{rjnp} + R_{njrp} + R_{nprj} + R_{rpnj} = 0 \qquad (66.5)$$

ولكن نحن نعلم بأن:

$$R_{rjnp} = R_{nprj} \qquad (67.5)$$

و

$$R_{njrp} = R_{rpnj} \qquad (68.5)$$

وذلك انطلاقاً من خواص تماثل الموتر R_{rjnp} [المثال *(7.5)* – الفقرة حـ) وهكذا فإن:

$$R_{rjnp} + R_{rpnj} = 0 \qquad (69.5)$$

[ومن المثال *(7.5)* الفقرة أ و ب] نلاحظ أن:–

$$R_{rpnj} = - R_{rpjn} \qquad (70.5)$$

عليه من *(69.5)* و *(70.5)* نحصل على:

$$R_{rjnp} = R_{rpjn} \qquad (71.5)$$

وبتبديل دوري للأدلة $\{j, n, p\}$ في *(71.5)* نحصل على:

$$R_{rnpj} = R_{rjnp} \qquad (72.5)$$

وهذا يعني أن:–

$$R_{rjnp} = R_{rpjn} = R_{rnpj} \qquad (73.5)$$

ومرة أخرى من (المثال *(7.5)* الفقرة د) نتوصل إلى

$$R_{rjnp} \doteq 0 \qquad (74.5)$$

وكون أن العلاقة (74.5) صحيحة يؤدي إلى أن $k = 0$ هو أمر واضح. وبذلك فإن الشرط الضروري والكافي لكي يكون الفضاء مسطحاً $(k = 0)$ هو صحة العلاقة (74.5).

مثال (9.5)

اثبت أنه بالنسبة للمستوى الاقليدي بالمتري $ds^2 = d\,x^2 + d\,y^2$ (في الإحداثيات الكارتيزية) يكون الفضاء مسطحاً.

الحل:

من تعريف R_{rjnp} [العلاقة (40.5)] وحيث أن رموز كريستوفل كلها تساوي الصفر هنا (ذلك لأن $g_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ و $g_{11} = 1$ و $g_{22} = 1$ ، عليه فإن $R_{rjnp} = 0$ وبذلك فإن مستوى إقليدس يمثل فضاءً مسطحاً وهو أمر بديهي:

حـ- الفضاء ثابت الانحناء

هنا يمكننا التذكير بمبرهنة شور (Schor's Theorem) والتي تنص على أنه:

(إذا كان إنحناء ريمان عند كل نقطة في فضاء V_N $(2 < N)$ دالة في الإحداثيات فقط فإنه يكون ثابتاً خلال V_N).

V_N في هذه الحالة يسمى بالفضاء ثابت الانحناء.

.(Space of constant curvatore)

مثال (10.5)

المتري للفضاء V_2 والمكون من سطح كرة نصف قطرها a هو $ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ [بدلالة الإحداثيات القطبية].

اثبت أن سطح الكرة هو سطح ثابت الانحناء وثابت انحنائه يساوي $\frac{1}{a^2}$.

الحل:

حيث أن $g_{11} = a^2$ و $g_{22} = a^2 \sin^2 \theta$ و $g_{12} = 0$ ومن المعادلة (40.5) نستطيع حساب R_{1212} ويعطي بـ $R_{1212} = a^2 \sin^2 \theta$ ؛ ومن صيغة R_{1212} نرى أن هذا الموتر يعتمد على θ فقط وبذلك نستنتج أن k ثابت [نظرية شور]. هذا أمر يمكن التحقق منه بالرجوع للمثال (8.5) والتعويض عن R_{1212} حيث نرى أن:

$$k = \frac{R_{1212}}{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^4 \sin^2 \theta - 0} = \frac{1}{a^2}$$

وهكذا فإن سطح الكرة يمثل فضاء ثابت الانحناء وثابت انحنائه $\frac{1}{a^2}$.

تمارين (5)

1- اثبت أنه للعنصر الخطي من النوع (17.5) تحقق الجيوديسيات المتلاشية المعادلات (18.5).

2- اثبت أن المنحنى المتلاشي لا يكون بالضرورة جيوديسياً متلاشياً وذلك باعطاء مثال من عندك.

3- ماذا يعني اختيار المنظومة الجيوديسية بحيث $x_0^i = 0$ ؟

4- اثبت أنه في حالة اختيار المنظومة الجيوديسية تكون المشتقة موافقة التغاير عند القطب هي نفسها المشتقة الجزئية المماثلة.

5- اثبت أنه عند P_0 بمنظومة احداثيات جيوديسية تكون العلاقة

$$A_{i,jk} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - A_l \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^l_{ij}$$

صحيحة

6- اثبت أن $\frac{\delta A^i}{\delta t} = g^{ij} \frac{\delta A_j}{\delta t}$.

7- أثبت صحة العلاقة (28.5).

8- اثبت أن الزاوية بين متجهين غير متلاشيين تبقى ثابتة عندما يحدث لهما انتشار متواز معاً وعلى نفس المنحنى.

9- في V_2 وبالمتري $ds^2 = du^2 + 2\lambda\, du\, dv + dv^2$ $[\lambda = \lambda(u, v)]$ أوضح بأن المتجهات المماسة للمنحنى ثابت = u تكون مجالاً من المتجهات المتوازية على طول المنحنيات ثابت = v.

10- بإستخدام خاصية التوازي أثبت أن المشتقة موافقة التغاير لكميات $A^{v_1 \dots v_s}_{r_1 \dots r_p}$ بالنسبة لـ x^n هي موتر.

11- أثبت أن $R^l_{lnp} = 0$

12- أوضح بأن عدد مركبات موتر الانحناء المستقلة هي $\frac{1}{2} N^2 (N^2 - 1)$ وذلك للفضاء ذي البعد N.

13- اثبت أن $R_{rjnp} + R_{rnpj} + R_{rpjn} = 0$ وذلك بإستعمال منظومة احداثيات جيوديسية.

14- اثبت أن $R_{1212} = -f \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ وذلك في V_2 بعنصر خطي $ds^2 = du^2 + f^2 dv^2$ وحيث f دالة (u, v).

15- لأي فضاء V_2؛ اثبت أن:

أ - $g R_{ij} = - g_{ij} R_{1212}$ ب- $g R = - 2R_{1212}$

حـ- كل V_2 هو من نوع فضاء أينشتين.

16- اكتب التفاصيل اللازمة للوصول إلى المعادلة (56.5)؟

17- ناقش أهمية المعادلة (59.5) في النظرية النسبية.

18- اثبت صحة العلاقة (63.5).

19- أثبت أن المستوى الاقليدي بالمتري $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ في الإحداثيات القطبية، يمثل فضاء مسطحاً.

20- إذا كان المتري لفضاء مسطح في بعدين هو:

$ds^2 = f(r) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$ وحيث $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ فأوضح بأن $f(r) = c r^k$ وحيث c و k ثابتان.

21- اثبت مبرهنة شور.

22- في فضاء اقليدس V_4، أوضح بأن الكرة الزائدة (*Hypersphere*):-

$$x^1 = c \sin\theta \sin\phi \sin\psi$$
$$x^2 = c \sin\theta \sin\phi \cos\psi$$
$$x^3 = c \sin\theta \cos\phi$$
$$x^4 = c \cos\theta$$

هي V_3 بانحناء ثابت يساوي $\frac{1}{c^2}$.

23- اثبت أن أي فضاء ثابت الانحناء هو فضاء آينشتين.

الفصل السادس
تطبيقات الموترات

1.6- تمهيد

2.6- موتر الاستقطاب

3.6- موتر عزم القصور الذاتي.

4.6- معادلات ماكسويل.

5.6- المؤثرات الموترية.

6.6- تفاعل ثنائي القطب مع ثنائي قطب آخر.

7.6- الفضاء رباعي الأبعاد.

أولاً: الموترات في الفضاء الرباعي.

ثانياً: تحويلات لورنتز.

ثالثاً: فضاء ريمان.

8.6- الميكانيكا النسبية.

9.6- أمثلة متفرقة.

1.6 تمهيد:

الكميات والقوانين الفيزيائية لاتعتمد على نوعية الإحداثيات أو الرياضيات المستخدمة في وصفها فكثيراً من الفيزيائيين يشبهون الكميات الفيزيائية بالمبنى والرياضات المستخدمة بسقالة البناء ففي مرحلة البناء تكون السقالة من الأشياء الضرورية ولكن في نهاية مرحلة البناء تخلع السقالة ويبقى المبنى قائماً فشكل المبنى وخواصه لا تعتمد على السقالة أو نوعها. بعض الكميات الرياضية مثل الموترات *(Tensors)* يوجد بها خاصية مهمة جداً إذ أنها لا تتأثر بعملية دوران المحاور أو تحويلتها وكذلك لا تعتمد على نوعية الإحداثيات المستخدمة وهذا في حالة التحويل بين انظمة الإحداثيات المختلفة وعليه تعد الموترات أداة جيدة لوصف القوانين والكميات الفيزيائية. نحاول في هذا الفصل اعطاء بعض الأمثلة لاستخدامات الموترات في وصف الكميات الفيزيائية وكذلك كيفية صياغة بعض المعادلات الفيزيائية والقوانين الهامة في صورة موترات.

2-6 موتر الاستقطاب *Tensor of Polarizability*

الخواص الفيزيائية للمواد البلورية تعتمد على الاتجاهات داخل البلورة فمثلاً متجه الاستقطاب $\vec{P}$ الناتج في المواد المتباينة *(Anistropic)* نتيجة تسليط مجال كهرباء خارجي يختلف من اتجاه إلى آخر في داخل البلورة وهنا نجد أن موتراً من الرتبة الثانية يمكننا من وصف هذه الحالة لأنه يحوي تسع مركبات تمثل جميع الاتجاهات الممكنة في البلورة وتكتب علاقة التناسب بين متجه الاستقطاب $\underset{\sim}{P}$ والمجال الكهربي الخارجي $\underset{\sim}{E}$ على النحو التالي:

$$P_i = \epsilon_0 x_{ij} E_j \qquad (1.6)$$

ϵ_0 ثابت السماحية للوسط و x_{ij} معـامل التناسـب وهـو موتـر مـن الرتبـة الثانية يطلق عليه موتر الاستقطاب ويمكن اعادة صياغة المعادلة السـابقة بـأكثر تفصيل على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} X_{xx} & X_{xy} & X_{xz} \\ X_{ys} & X_{yy} & X_{yz} \\ X_{zx} & X_{zy} & X_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ Ez \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

من المعادلة *(2.6)* نستنتج أن وصف الخواص البصرية للمواد المتباينة تحتـاج إلى معرفة تسع مركبات لموتر الاستقطاب x_{ij}.

3.6 موتر عزم القصور الذاتي The tensor of inertia

عند دوران الأجسام الجاسئة حول محور ثابت فإن كمية الحركة الزاوية $\underset{\sim}{L}$ *(angular momentum)* تتناسب مع السـرعة الزاويـة $\underset{\sim}{\omega}$ *(angular velocity)* وتكتب علاقة التناسب على النحو:

$$\underset{\sim}{L} = I\underset{\sim}{\omega} \qquad (3.6)$$

حيث I يمثل معامل التناسـب ويطلـق عليـه عـزم القصـور الذاتـي للجسـم الجاسئ ومقدار هذه الكمية يعتمد على محور دوران الجسم الجاسئ وفي هـذه الحالة $\underset{\sim}{L}$ و $\underset{\sim}{\omega}$ لايكون لهما نفس الاتجاه وهذه هـي الحالـة العامـة؛ ولوصـف علاقة التناسب بين $\underset{\sim}{L}$ و $\underset{\sim}{\omega}$ نحتاج إلى كمية تمثل جميع الاتجاهـات الممكنـة في الجسم. نجد أن موتراً من الرتبة الثانية يقوم بهذه المهمة لأنه يحتوي على تسـع مركبات تمثل جميع الاتجاهات الممكنة ويحل هذا الموتر محل معامل التناسب في المعادلة *(3.6)* ويعاد صياغتها على هذا النحو:

$$L_i = I_{ij}\, \underset{\sim}{\omega}_j \tag{4.6}$$

حيث I_{ij} هو معامل التناسب وهو موتر من الرتبة الثانية يطلق عليه موتر عزم القصور الذاتي وبه تسع مركبات تحوي جميع الاتجاهات الممكنة في الجسم الجاسئ المعادلة الأخيرة تكتب بأكثر تفصيل على النحو:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

إذا لدراسة حركة الأجسام الجاسئة نحتاج إلى معرفة المركبات التسع لموتر القصور الذاتي I_{ij}.

4.6 معادلات ماكسويل **Maxwell's Equation**

نبين في هذا البند كيفية صياغة معادلات ماكسويل في صورة موترات وعادة تكتب معادلات ماكسويل على هذا الشكل:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{B} = 0 \\ &\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{D} = 4\pi\rho \\ &\underset{\sim}{\nabla}\wedge\underset{\sim}{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{B}}{\partial t} \\ &\underset{\sim}{\nabla}\wedge\underset{\sim}{B} = \frac{4\pi}{c}\underset{\sim}{J} \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

$\underset{\sim}{E}$ يمثل المجال الكهربي و $\underset{\sim}{H}$ المجال المغناطيسي و $\underset{\sim}{D}$ الإزاحة الكهربائية و $\underset{\sim}{B}$ الحث المغناطيسي و $\underset{\sim}{J}$ كثافة التيار و ρ كثافة الشحنة وأخيراً c سرعة الضوء.

ولتحويل معادلات ماكسويل في صورة موترات نرجع إلى المعادلتين [(124.4) , (110.4)] ويمكن كتابتهما على النحو التالي:

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A} = dir\, A^P = A^P_{,P} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{g}\, A^s\right) \qquad (7.6)$$

وهذه المعادلة تبين كيفية كتابة تباعد دالة متجه في صورة موتر، أما المعادلة (124.4) يمكن اعادة صياغتها لتصف دوران دالة متجه في صورة موتر على الشكل التالي:

$$curl\ \underset{\sim}{A} = -\in^{ijk} A_{j,k} \qquad (8.6)$$

وبإستخدام [(8.6) , (7.6)] يمكن اعادة كتابة معادلات ماكسويل (6.6) في صورة موترات على النحو:

$$\left.\begin{aligned} B^i_{,i} &= 0 \\ D^i_{,i} &= 4\pi\rho \\ \in^{ijk} E_{j,k} &= \frac{1}{c}\frac{\partial B^i}{\partial t} \\ \in^{ijk} H_{j,k} &= -\frac{4\pi}{c} J^i \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

5.6 المؤثرات الموترية Tensor Operators

عند حساب عناصر مصفوفة المؤثرات المختلفة تقسم هذه المؤثرات حسب سلوكها تحت عملية دوران المحاور. ولهذا نجد أن التعريف المعتاد للموترات في نظام الإحداثيات الكارتيزية لا يتناسب وذلك لأن مركبات الموتر ذو الرتبة n $(n \geq 2)$ تتشكل في مجموعات خطية مختلفة كل مجموعة تسلك سلوكاً يختلف عن بقية المجموعات الأخرى، ويحدث هذا تحت عملية دوران المحاور. ولهذا

جاءت فكرة تعريف موتر بحيث كل مركباته تسلك نفس السلوك تحت عملية دوران المحاور. نجد أن مركبات الدوال التوافقية الكروية $(Y_{l,m})$ وكل المجموعات الخطية المتكونة من تلك المركبات تسلك نفس السلوك تحت عملية دوران المحاور وعدد مركبات هذه الدوال يعطي بالعلاقة $[(2l+1)$ حيث $-l \leq m \leq l]$.

ويعرف الموتر ذو الرتبة n والذي يحوي $(2n+1)$ مركبة ويسلك سلوك الدوال التوافقية الكروية $Y_{l,m}$ تحت عملية دوران المحاور بالموتر الكروي *(Spherical tensor)* أو موتر غير قابل للاختزال *(irreducible tensor)*.

يحتوي المؤثر الموتري غير قابل للإختزال *(irreducible tensor Operator)* $T_{n,q}$ ذو الرتبة n على $(2n+1)$ مركبة حيث $(-n \leq q \leq n)$ ويخضع الموتر $T_{n,q}$ لنفس قوانين التبادل مع مؤثر الحركة الزاوية الكلي $\underset{\sim}{J}$ والذي يمكن كتابة علاقاته على النحو:

$$\left[\left(J_x \pm i\, J_y\right), T_{n,q}\right] = \sqrt{(n \mp q)(n \mp q+1)}\, T_{n,q\pm 1} \qquad (10.6)$$

$$[(J_z, T_{n,q}] = q\, T_{n,q} \qquad (11.6)$$

حيث تمثل (J_x, J_y, J_z) مركبات مؤثر الحركة الزاوية الكلي. وأبسط مثال على ذلك لو أخذنا موتراً من الرتبة الأولى أي متجه $\underset{\sim}{A}$ ويتم وضع مركبات هذا الموتر في الإحداثيات الكروية على النحو:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= |\underset{\sim}{A}| \sin\theta \cos\phi \\ A_y &= |\underset{\sim}{A}| \sin\theta \sin\phi \\ A_z &= |\underset{\sim}{A}| \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

ومن تعريف A_0 و $A_{\pm 1}$ والذي يكتب على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A_z \\ A_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + i\,A_y) \\ A_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - i\,A_y) \end{aligned}\right\} \qquad (13.6)$$

بالتعويض عن قيم (A_x , A_y , A_z) من العلاقة (12.6) ثم بالتعويض عـن قيـم الدوال التوافقية الكروية $Y_{l,m}$ نحصل على العلاقات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= |\underset{\sim}{A}|\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|\underset{\sim}{A}|Y_{10} = |\underset{\sim}{A}|T_{1,0} \\ A_{+1} &= \frac{-|\underset{\sim}{A}|\sin\theta_e^{i\phi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left|\underset{\sim}{A}\right|Y_{1,+1} = |\underset{\sim}{A}|T_{1,+1} \\ A_{-1} &= \frac{|\underset{\sim}{A}|\sin\theta_e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left|\underset{\sim}{A}\right|Y_{1,-1} = |\underset{\sim}{A}|T_{1,-1} \end{aligned}\right\} \qquad (14.6)$$

من العلاقة (14.6) نجد أن مركبات المتجه الكروية تكون موتـراً غـير قـابل للإختزال ذو رتبة أولى وعلى النحو:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,0} &= A_0 \\ T_{1,\pm 1} &= A_{\pm 1} \end{aligned}\right\} \qquad (15.6)$$

في حين أن موتراً من الرتبة الثانية A_{ij} $(i , j = 1 ,2 , 3)$ يمكن أن يمثـل علـى الصورة:

$$A_{ij} = A\,\delta_{ij} + A'_{ij} + A''_{ij} \qquad (16.6)$$

حيث

$$A = \frac{1}{3} A_{ii} \qquad (17.6)$$

و

$$A'_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) \qquad (18.6)$$

وكذلك

$$A''_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji} - 2 A \delta_{ij}) \qquad (19.6)$$

حيث يمثل الحـد الأول في العلاقـة *(16.6)* بمجمـوع العنـاصر القطريـة وهـي كمية لازمة في عملية الدوران ولهـذا يمكـن تمثيـل هـذا الحـد بموتـر غـير قـابل للاختزال ذي رتبة صفرية على النحو:

$$T_{0,0} = A \qquad (20.6)$$

ومركبات الحد الثـاني A'_{ij} موتـر غـير متمـاثل **(Antisymmetnric tensor)** يمكن أن يمثل بموتر غير قابل للاختزال من الرتبة الأولى على الصورة:

$$T_{1,0} = A'_{xy} \qquad (21.6)$$

وكذلك

$$T_{1,\pm1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_{yz} \pm i \; A'_{zx}) \qquad (22.6)$$

أما مركبات الحد الثالث A''_{ij} في المعادلة *(16.6)* هو موتر متماثل يمكـن أن يمثل بموتر من الرتبة الثانية على النحو:

$$T_{2,0} = A''_{zz} \tag{23.6}$$

$$T_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,(A''_{zx} \pm i\,A''_{zy}) \tag{24.6}$$

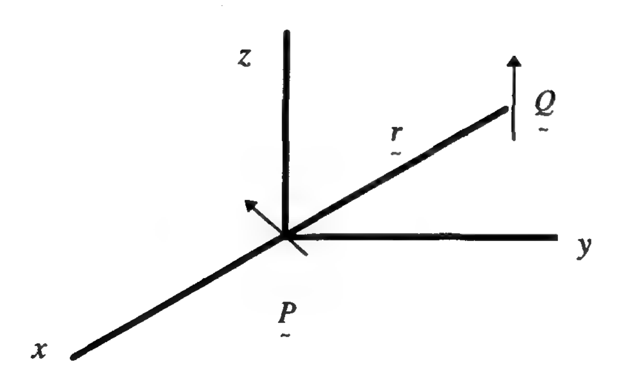
$$T_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,(A''_{xx} - A''_{yy} \pm 2i\,A''_{xy}) \tag{25.6}$$

ويعد الموتر الكروي من الكميات المهمة جداً في دراسة الفيزياء الذرية والفيزياء الجزئية وكذلك فيزياء الكم.

6.6 تفاعل ثنائي القطب مع ثنائي قطب آخر

Dipole - dipole interaction

يمكن تمثيل تفاعل ثنائي قطب مع ثنائي قطب آخر بموتر من الرتبة الثانية ومن ثم يمكن استخدام موتر غير قابل للاختزال. نفرض أن ثنائي القطب الأول يرمز له بالرمز $\underset{\sim}{P}$ والآخر بالرمز $\underset{\sim}{Q}$ [كما هو مبين في الشكل رقم (1.6)].



شكل رقم (1.6)

طاقة التفاعل بين القطبين تعطى بالعلاقة التالية [1]:-

$$U = \frac{1}{r^3}\left[\underset{\sim}{P}\cdot\underset{\sim}{Q} - \frac{3(\underset{\sim}{P}\cdot\underset{\sim}{r})(\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{r})}{r^2}\right] \qquad (26.6)$$

وفي حالة الاحداثيات الكارتيزية يمكـن إعـادة كتابـة المعادلـة (26.6) علـى الصورة

$$U = \frac{1}{r^3}\Big[(1-\frac{3x^2}{r^2})P_x Q_x - \frac{3xy}{r^2}P_x Q_y - \frac{3xz}{r^2}P_x Q_z - \frac{3yx}{r^2}P_y Q_x$$

$$+ (1-\frac{3y^2}{r^2})P_y Q_y - \frac{3yz}{r^2}P_y Q_z - \frac{3zx}{r^2}P_z Q_x - \frac{3zy}{r^2}P_z Q_y$$

$$+ (1-\frac{3z^2}{r^2})P_z Q_z\Big] \qquad (27.6)$$

المعادلة السابقة يمكن وضعها على هيئة مصفوفة على النحو:

$$U = \frac{1}{r^3}(P_x\,P_y\,P_z)\begin{pmatrix}(1-\frac{3x^2}{r^2}) & -\frac{3xy}{r^2} & -\frac{3xz}{r^2}\\ -\frac{3yx}{r^2} & (1-\frac{3y^2}{r^2}) & -\frac{3yz}{r^2}\\ -\frac{3zx}{r^2} & -\frac{3zy}{r^2} & (1-\frac{3z^2}{r^2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_x\\ Q_y\\ Q_z\end{pmatrix} \qquad (28.6)$$

ومن العلاقة السابقة يمكن كتابة موتر تفاعل ثنائي القطب على النحو:

$$T = \begin{pmatrix}(1-\frac{3x^2}{r^2}) & -\frac{3xy}{r^2} & \frac{-3xz}{r^2}\\ \frac{-3yx}{r^2} & (1-\frac{3y^2}{r^2}) & \frac{-3yz}{r^2}\\ \frac{-3zx}{r^2} & \frac{-3zy}{r^2} & (1-\frac{3z^2}{r^2})\end{pmatrix} \qquad (29.6)$$

ويعد هذا الموتر من الرتبة الثانية وهو متماثل ومجموع عناصره القطرية تساوي صفراً ويمكن كتابة العنصر العام للموتر السابق على الصورة:

$$T_{ij} = (\delta_{ij} - \frac{3 r_i r_i}{r^2}) \tag{30.6}$$

وإذا قمنا بكتابة $\underset{\sim}{P}$ و $\underset{\sim}{Q}$ في صورة متجهات كروية نحصل على:

$$P_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (P_x \pm i P_y) \quad و \quad P_0 = P_z \tag{31.6}$$

وكذلك

$$Q_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_x \pm i Q_y) \quad و \quad Q_0 = Q_z \tag{32.6}$$

وبإستخدام الاحداثيات الكروية والتعويض عن المعادلة (31.6) و (32.6) في المعادلة (27.6) نجد أن طاقة التفاعل تأخذ الصورة:

$$U = \frac{1}{r^3} \{ -\sqrt{6}\ Y_{2,-2} P_{+1} Q_{+1} + \sqrt{3}\ Y_{2,-1} P_{+1} Q_0 - Y_{2,0} P_{+1} Q_{-1}$$
$$+ \sqrt{3}\ Y_{2,-1} P_0 Q_{+1} - 2 Y_{2,0} P_0 Q_0 + \sqrt{3}\ Y_{2,1} P_0 Q_{-1}$$
$$- Y_{2,0} P_{-1} Q_{+1} + \sqrt{3}\ Y_{2,1} P_{-1} Q_0 - \sqrt{6}\ Y_{2,2} P_{-1} Q_{-1} \} \tag{33.6}$$

يمكن اختصار المعادلة السابقة إلى صورة أبسط وذلك بإستخدام موترات غير قابلة للاختزال ذات الرتبة الثانية. دعنا نقوم بتعريف موتر غير قابل للاختزال من الرتبة الثانية $V_{2,m}$ على النحو:

$$V_{2,\pm 2} = P_{\pm 1} Q_{\pm 1} \qquad (34.6)$$

و

$$V_{2,\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{P_{\pm 1} Q_0 + P_0 Q_{\pm 1}\} \qquad (35.6)$$

وكذلك

$$V_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{3 P_0 Q_0 - \underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{Q}\} \qquad (36.6)$$

بالتعويض بهذه المعادلات {(34.6) ← (36.6)} في المعادلة (33.6) تحصل على:

$$U = \frac{1}{r^3} \sqrt{\frac{24\pi}{5}} \sum_m (-1)^m \; Y_{2,m} V_{2,-m} \qquad (37.6)$$

المعادلة السابقة تبين كيفية اختصار كتابة الكميات الفيزيائية مثل تفاعل ثنائي القطب مع ثنائي قطب آخر بواسطة موتر غير قابل للاختزال ومن هنا نجد أن استخدام الموترات له خاصية اختصار كتابة المعادلات المطولة كما هو الحال في النظرية النسبية العامة وبخاصة التي يعتبر فيها معرفة حساب الموترات من الأشياء الضرورية لفهم أغوار تلك النظرية.

7.6 الفضاء رباعي الأبعاد Four dimensional space

أولاً: الموترات في الفضاء رباعي الأبعاد *Four dimensional tensors*

النظرية النسبية تحتاج لفضاء ذي أربعة أبعاد وتستخدم الموترات في ذلك الفضاء لوصف معادلات تلك النظرية لما لها من خاصية اللا تغير *(invariance)* لكميات الفيزيائية في مختلف الإحداثيات وكذلك امكانية

اختصار كتابة الكميات الفيزيائية كما سبق وأن نوهنا في البند السابق. دعنا أولاً نعطي لمحة بسيطة على الموترات في الفضاء الرباعي الأبعاد علماً بأن الموتر المتري يأخذ الصورة:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (38.6)$$

عادة تستخدم الحروف اليونانية لتأخذ القيم

$(\lambda, \nu, \mu, \dots, = (0, 1, 2, 3)$

ويكون أختيار المحاور في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= c^t \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}\right\} \qquad (39.6)$$

عملية التحويل من محاور إحداثيات قديمة إلى محاور إحداثيات حديثه تتم بواسطة العلاقة الخطية الآتية:

$$\bar{x}^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad (40.6)$$

المعامل (α^{μ}_{ν}) هو محدد التحويل وله الخواص:

$$\alpha^{\mu}_{\nu}\ \alpha^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \qquad (41.6)$$

حيث δ^{λ}_{ν} نأخذ القيم 0 في حالة $\lambda \neq \nu$ والقيم 1 في حالة $\nu = \lambda$ وعملية التحويل العكسي من المحاور الجديدة إلى القديمة تتم على الصورة:

$$x^{\mu} = (\tilde{\alpha})^{\mu}_{\nu}\, \bar{x}^{\nu} \qquad (42.6)$$

حيث $(\tilde{\alpha})^{\mu}_{\nu}$ هي محورة المحدد α^{μ}_{ν} ولها الخاصية التي يمكن ان تكتب على النحو:

$$\alpha^{\mu}_{\nu}\ (\tilde{\alpha})^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \qquad (43.6)$$

من العلاقة *(41.6)* و *(43.6)* نحصل على:

$$\det \alpha = \pm 1$$

القيمة الموجبة $\det \alpha = +1$ التي تربط العلاقة بين المحاور x و $\bar{x}$ في حالة تحويل نقي *(Proper transformation)* والقيمة السالبة $\det\ \alpha\ =\ -1$ وتربط العلاقة بين المحاور x و $\bar{x}$ وتمثل انعكاساً *(reflection)* أو اقلاباً *(Inversions)*؛ وبعد هذا التمهيد نصل إلى تعريف الموترات في الفضاء رباعي الأبعاد على النحو:

أ – موتر من الرتبة الصفرية (كمية لازمة) بعرف على أساس الكمية اللازمة أي التي لاتتغير في أي إحداثيات أو نتيجة دوران المحاور ويتم تحويلها على الصورة:

$$\bar{U} = U \qquad (44.6)$$

ب– الموتر من الرتبة الأولى (متجه) يعرف على أساس الكمية التي يتم تحويلها على النحو:

$$\bar{A}_{\mu} = \alpha^{\nu}_{\mu}\, A_{\nu} \qquad (45.6)$$

حـ- الموتر من الرتبة الثانية تلك الكمية التي يتم تحويلها على الصورة:

$$\overline{B}_{\mu\upsilon} = \alpha_{\mu}^{\sigma}\,\alpha_{\nu}^{\rho}\,B_{\sigma\rho} \qquad (46.6)$$

والآن نتسآل عن كيفية كتابة المؤثر *(Operator)* $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ في الفضاء رباعي الأبعاد؛ بالاستعانة بالمعادلة *(40.6)* يمكن كتابة المؤثر $\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\mu}}$ على الصورة:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\mu}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \qquad (47.6)$$

حيث $\frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial \overline{x}^{\mu}}$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial \overline{x}^{\mu}} = \alpha_{\nu}^{\mu} \qquad (48.6)$$

المعادلة *(47.6)* يمكن اعادة صياغتها على النحو:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\mu}} = \alpha_{\nu}^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\nu}} \qquad (49.6)$$

إذا $\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\mu}}$[وعادة يرمز له بـ ∂_{μ}] وهو موتر من الرتبة الأولى [متجه] في الفضاء رباعي الأبعاد وذلك حسب التعريف *(45.6)*.

ويوجد مؤثر *(Operator)* أخر يطلق عليه مؤثر دالمبيرت *(D`Alembert opemtor)* وهو موتر من الرتبة الثانية ويكتب على النحو:

$$^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{22}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{32}} \qquad (50.6)$$

ويمكن أن يكتب كذلك على الصورة:

$$^2 \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \qquad (51.6)$$

حيث ∇^2 هو مؤثر لابلاس المعتاد في الفضاء ثلاثي الأبعاد أما إذا أخذنا المحاور على النسق التالي:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \\ x^4 &= ict \end{aligned}\right\} \qquad (52.6)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ ففي هذه الحالة يكتب المؤثر ^{2} على الصورة:

$$^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \qquad (53.6)$$

ثانياً: تحويلات لورنتز *Lorentz transformation*

مصفوفة تحويلات لورنتز تكتب على الصورة [2]:-

$$\alpha^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (54.6)$$

حيث $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ و $\beta = \frac{v}{c^2}$ و v تمثل سرعة الجسم و c سرعة الضوء في الفضاء. العلاقة بين المحاور الجديدة والقديمة في تحويلات لورنتز حسب العلاقة *(54.6)* تعطى مركبات موترات المحاور من الرتبة الأولى [متجه] على النحو:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - \gamma t \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (55.6)$$

ثالثاً: فضاء ريمان *Riemann space*

الفضاء ذو ثلاثة أبعاد تحدد فيه المسافة *(ds)* بين نقطتين متجاورتين (x^1, x^2, x^3) و $(x^1 + dx^1, x^2, x^3 + dx^3)$ بالعلاقة التالية:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 \qquad (56.6)$$

في حالة الفضاء ذي n من الأبعاد تحدد المسافة فيه بين نقطتين متجاورتين حسب التعريف التالي:

$$(ds)^2 = \sum_{ij}^{n} g_{ij}\; dx^i\, dx^j \qquad (57.6)$$

g_{ij} يطلق عليه الموتر المتري وهو موتر من الرتبة الثانية ويطلق على هذا الفضاء بفضاء ريمان. أما في حالة الفضاء رباعي الأبعاد يصبح الفضاء فضاء منكونسكي *(Minkowsk's space)* ويوجد به نظامين للأدلة الدمية $(\nu,\ \mu,\ \ldots)$

حيث تأخذ القيم $(\mu = 1,2,3,4)$ أو $(\mu = 0,1,2,3)$ في الحالة الأولى تكون الإحداثيات تخيلية:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \\ x^4 &= ict \end{aligned}\right\} \qquad (58.6)$$

وهي مركبات موتر من الرتبة الأولى [متجه].

أما في الحالة الثانية تكون الإحداثيات حقيقية على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}\right\} \qquad (59.6)$$

وهي مركبات موتر من الرتبة الأولى [متجه]. حيث تعطى المسافة في حالة النظام الثاني بالعلاقة التالية:

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad (60.6)$$

8.6 الميكانيكا النسبية

عند الانتقال إلى عالم النسبية يجب استعمال الفضاء رباعي الأبعاد فيصبح الموتر ذو الرتبة الأولى الذي يمثل مركبات المحاور الرباعية على الصورة

$$x_\mu = (\underset{\sim}{x}, i\,c\,t) \qquad (61.6)$$

وبإجراء عملية التفاضل للمعادلة (61.6) نحصل على:

$$dx_\mu = (d\underset{\sim}{x}\ , icdt) \qquad (62.6)$$

حيث $d\underset{\sim}{x}$ موتر من الرتبة الأولى ويمثل متجه الموضع في الفضاء ثلاثي الأبعاد وبما أن طول الفترة في الفضاء الرباعي وهي كمية لازمة تعطى بالعلاقة:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3}(d\,x^i\,)^2\ - c^2\,d\,t^2 \qquad (63.6)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$(ds)^2\ = -\,c^2\,d\,t^2\left(1-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d\,x^i}{d\,t}\right)^2\right)$$

$$= -\,c^2\,d\,t^2\,(1-\frac{v^2}{c^2}) = -\,c^2\,d\,t^2\,(1-\beta^2) \qquad (64.6)$$

المعادلة الأخيرة نعيد صياغتها على الصورة:

$$ds\ \ = i\,c\,\frac{d\,t}{\gamma} \qquad (65.6)$$

دعنا نسمي $\frac{d\,t}{\gamma}$ بـ $d\tau$ وبما أن ds كمية لازمة إذا $d\tau$ كذلك كمية لازمة أي موتر من الرتبة الصفرية ويطلق عليه الزمن الحقيقي *(Proper time)* في فضاء مينكوفسكي ومن المعادلة (62.6) والزمن الحقيقي $d\tau$ يمكن ايجاد معدل التغير $\frac{d\,x_\mu}{d\,\tau}$ وتصبح العلاقة على الصورة:

$$\frac{d\,x_\mu}{d\,\tau} = \left(\frac{d\,\underset{\sim}{x}}{d\,\tau}, ic\frac{d\,t}{d\,\tau}\right) = V_\mu \qquad (66.6)$$

V_μ هو موتر من الرتبة الأولى في الفضاء رباعي الأبعـاد ويطلـق عليـه متجـه السرعة الرباعية في حين أن مركبات السرعة في الفضاء ثلاثـي الأبعـاد تعطـى بالعلاقة:

$$V_i = \frac{d\,x^i}{d\,t} \qquad (67.6)$$

العلاقة *(66.6)* يعاد كتابتها على الصورة:

$$V_\mu = \gamma(\underset{\sim}{V}\,,\, ic) \qquad (68.6)$$

الزخـم الخطـي *(Linear momentum)* يعطـى في الميكانيكـا الكلاسـيكية بالعلاقة:

$$\underset{\sim}{P} = m\,\underset{\sim}{V} \qquad (69.6)$$

حيث m كتلة الجسم وفي حالة وجود الكتلة في مناط اسناد سـاكن يطلـق عليها كتلة السكون *(rest mass)* ويرمز لها بالرمز m_0 بضرب هذه الكميـة في المعادلة *(68.6)* نحصل على:

$$P_\mu = m_0\,V_\mu = (\gamma m_0\,\underset{\sim}{V}\;,\; i\,c\,\gamma m_0) \qquad (70.6)$$

ومن المعادلة *(70.6)* و *(69.6)* نجد أن الكتلة m تعطى بالعلاقة:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0 \qquad (71.6)$$

ومنها نصل إلى معادلة آنشتين المشهورة التي تربط الطاقة والكتلة وتكتب على الصورة:

$$E = m\,c^2 \qquad (72.6)$$

وهي موتر من الرتبة الصفرية وهذه المعادلة من أهم المعادلات في الفيزياء الحديثة حيث ربطت الكتلة والطاقة واصبحا وجهين لعملة واحدة. ومن العلاقة *(70.6)* و *(72.6)* يمكن ايجاد P_4 على الصورة:

$$P_4 = i\frac{E}{c} \qquad (73.6)$$

وبالتعويض في المعادلة *(70.6)* نحصل على مركبات موتر الزخم الخطي في الفضاء الرباعي.

$$P_\mu = (\underset{\sim}{P}, i\,P_4) = (\underset{\sim}{P}, i\,\frac{E}{c}) \qquad (74.6)$$

9.6 أمثلة متفرقة:

مثال (1.6)

أثبت أن معادلة الموجه الكلاسيكية ليست كمية لازمة *(invaviant)* تحت التحويلات الجاليلية *(Galilean transformation)*:

الحل:

معادلة الموجه الكلاسيكية تعطى بالعلاقة [2]:

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad (75.6)$$

حيث أن

$$\phi=\phi(x,y,z,t) \qquad (76.6)$$

والتحويلات الجاليلية تعطى بالعلاقة [2]:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=x-vt\\ \bar{y}&=y\\ \bar{z}&=z\\ \bar{t}&=t\end{aligned}\right\} \qquad (77.6)$$

المعادلات السابقة تمثل العلاقة بين الإحداثيات القديمة والجديدة نقوم الآن بتحويل معادلة الموجة (75.6) إلى الإحداثيات الجديدة $\phi\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$ من خلال المعادلات (77.6) وبإستخدام قاعدة السلسلة نحصل على:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}\frac{\partial\bar{t}}{\partial x} \qquad (78.6)$$

ومن المعادلات (77.6) نحصل على العلاقات التالية:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x}=1\end{array}\right\} \qquad (79.6)$$

بالتعويض في المعادلة (78.6) من المعادلة (79.6) نجد أن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \qquad (80.6)$$

وبما أن المؤثر $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\phi \qquad (81.6)$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{\partial}{\partial x}$ من المعادلة (80.6) نجد أن المعادلة (81.6) أخذت الصورة:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (82.6)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad (83.6)$$

وكذلك

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (84.6)$$

وأما بالنسبة إلى $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ نقوم أولاً بإستخدام قاعدة السلسلة حيث نجد أن

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \qquad (85.6)$$

ومن المعادلات *(77.6)* نحصل على:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}=-V\\&\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}=1\\&\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}=0\end{aligned}\right\} \qquad (86.6)$$

بالتعويض بالعلاقات *(86.6)* في المعادلة *(85.6)* نحصل على:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\left(-v\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}}\right) \qquad (87.6)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2}-2v\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}\partial \bar{t}}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} \qquad (88.6)$$

بالتعويض في معادلة الموجة *(75.6)* من المعادلات *(82.6)* و *(83.6)* و *(84.6)* وكذلك *(88.6)* نحصل على الصورة:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}=\frac{1}{c^2}\left(v^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2}-2v\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}\partial \bar{t}}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2}\right) \qquad (89.6)$$

ويمكن اختصار المعادلة السابقة إلى الصورة

$$\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2}-\frac{2v}{c}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}\partial \bar{t}} \qquad (90.6)$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن $\left(-\frac{2v}{c}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}\partial \bar{t}}\right)$ في المعادلة *(90.6)* يبين أن معادلة الموجة الكلاسيكية ليست لازمة. أي أن معادلة الموجة لا تتغير مثل موتر تحت التحويلات الجاليلية ولهذا لا نستطيع استعمال هذه التحويلات للمعادلة الموجية.

مثال (2.6)

اثبت أن معادلة الموجة الكلاسيكية كمية لازمة *(invariant)* تحت تحويلات لورنتز المعادلة *(55.6)* .

الحل:

تحويلات لورنتز تعطى من المعادلة *(55.6)* على الصورة

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\gamma(x-vt)\\ \bar{y}&=y\\ \bar{z}&=z\\ \bar{t}&=\gamma(1-\frac{\beta}{c}x)\end{aligned}\right\} \qquad (91.6)$$

حيث أن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ,\beta = \frac{v}{c} \qquad (92.6)$$

بإستخدام قاعدة السلسلة كما في المثال السابق نجد أن:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} - \frac{2\gamma^2 v}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \frac{\gamma^2 V^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} \qquad (93.6)$$

و

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} \qquad (94.6)$$

و

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \qquad (95.6)$$

وكذلك:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \; v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} \qquad (96.6)$$

بالتعويض في معادلة الموجه *(75.6)* بواسطة المعادلات *(93.6)* ← *(96.6)*

نجد أن:

$$\left(\gamma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} - \frac{2\gamma v}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2}\right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} \left(\gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2}\right) \qquad (97.6)$$

يمكن اختصار المعادلة *(97.6)* إلى الصورة:

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\gamma^2}{c^2}(1-\beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} \qquad (98.6)$$

ولكن من المعادلة *(92.6)* نجد أن:

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) = 1 \qquad (99.6)$$

المعادلة *(98.6)* تكتب على الصورة الأخيرة وهي:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} \qquad (100.6)$$

المعادلة *(100.6)* تبين أن معادلة الموجة تمثل كمية لازمة تحت تحويلات لورنتز أي تسلك سلوك موتر.

مثال *(3.6)*

اثبت أن موتر عزم القصور الذاتي للجسم الجاسئ يعطي بالعلاقة:

$$I_{il} = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \left((r^{\alpha})^2 \delta_{il} - x_i^{\alpha} x_l^{\alpha}\right)$$

الحل:

الجسم الجاسى متكون من مجموعة جسيمات متماسكة بفرض أن الجسم α كتلته m^{α} ومتجه موضعه $\underset{\sim}{r}^{\alpha}$ يدر حول محور خلال نقطة الأصل 0 بسرعة زاوية $\underset{\sim}{w}$. وحيث تعرف كمية حركته الزاوية الكلية بالعلاقة:

$$\underset{\sim}{L} = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \underset{\sim}{r}^{\alpha} \wedge \underset{\sim}{P}^{\alpha} \qquad (101.6)$$

حيث $\underset{\sim}{P}$ كمية الحركة الخطية وتعرف على الصورة:

$$\underset{\sim}{P} = m\, \dot{\underset{\sim}{r}} \qquad (102.6)$$

حيث $\dot{\underset{\sim}{r}}$ السرعة الخطية وعلاقتها مع السـرعة الزاويـة $\underset{\sim}{\omega}$ تعطى بالعلاقـة التالية:

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{\omega} \wedge \underset{\sim}{r} \qquad (103.6)$$

بالتعويض في المعادلة *(101.6)* من المعادلة *(102.6)* نحصل على:

$$\underset{\sim}{L} = \sum_{\alpha} m^{\alpha}\ \overset{\alpha}{\underset{\sim}{r}} \wedge \dot{\underset{\sim}{r}}^{\alpha} \qquad (104.6)$$

حيث تكتب $\dot{\underset{\sim}{r}}$ و $\underset{\sim}{r}$ في صورة مركبات متجه على الصورة:

$$\underset{\sim}{r} = x_j\, \hat{e}_j \qquad (105.6)$$

و

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{x}_k\ \hat{e}_k \qquad (106.6)$$

بـالتعويض في المعادلـة *(104.6)* مـن المعـادلتين *(105.6)* و *(106.6)* نحصـل على:

$$\underset{\sim}{L} = \sum_{\alpha} m^{\alpha}\ x_j^{\alpha}\, \dot{x}_k^{\alpha}\, (\hat{e}_j \wedge \hat{e}_k) \qquad (107.6)$$

بالتعويض عن قيمة $(\hat{e}_j \wedge \hat{e}_k)$ من المعادلة *(25.2)* في المعادلة *(107.6)* يمكن كتابة المركبة i لكمية الحركة الزاوية الكلية على الصورة:

$$L_i = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \in_{ijk} x_j^{\alpha} \dot{x}_k^{\alpha} \qquad (108.6)$$

ولكن من المعادلة *(103.6)* والاستعانة كذلك بالمعادلة *(25.2)* يمكن أن نكتب المركبة k للسرعة الخطية على الشكل:

$$\dot{x}_k = \in_{lmk} \omega_l x_m \qquad (109.6)$$

بالتعويض بالمعادلة *(109.6)* في المعادلة *(108.6)* نحصل على:

$$L_i = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \in_{ijk} \in_{lmk} x_j^{\alpha} \omega_l x_m^{\alpha} \qquad (110.6)$$

بالتعويض عن قيمة $(\in_{ijk} \in_{lmk})$ من المثال رقم *(8.2)* يمكن أن نكتب المعادلة *(110.6)* على الصورة:

$$L_i = \sum_{\alpha} m^{\alpha} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j^{\alpha} x_m^{\alpha} \omega_l \qquad (111.6)$$

بفك الجمع حول الدليل m فقط في الحد الأول من المعادلة *(111.6)* و فك الجمع حول الأدلة (j, m) في الحد الثاني لنفس المعادلة والتعويض عن قيمة بـ $(r^2 = x_j x_j)$ نجد أن المعادلة *(111.6)* يمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$L_i = \sum_{\alpha} m^{\alpha} ((r^{\alpha})^2 \delta_{il} - x_i^{\alpha} x_l^{\alpha}) \omega_l \qquad (112.6)$$

ومن تعريف كمية الحركة الزاوية الكلية التي تعطى بالعلاقة:

$$L_i = I_{il}\,\omega_l \qquad (113.6)$$

بالمقارنة بين المعادلة *(112.6)* والمعادلة *(113.6)* نجد أن موتر القصور الذاتي يمكن أن يكتب على الصورة:

$$I_{il} = \sum_{\alpha} m^{\alpha}\,[(r^{\alpha})^2\,\delta_{il} - x_i^{\alpha}\,x_l^{\alpha}\,] \qquad (114.6)$$

وهو المطلوب اثباته.

مثال (4.6)

إذا عرفنا موتراً من الرتبة الثانية $F_{\mu\lambda}$ ملتوي التماثل في الفضاء الرباعي بحيث [$F_{12} = H_3$؛ وبشكل دوري بتغيير الأدلة] حيث H تمثل مركبة المجال المغناطيسي والمركبة F_{i4} تعطى بالعلاقة [$F_{i4} = -D_i$؛ (حيث $i= 1,2,3$)]، D، تمثل مركبة المجال الكهربي. وكذلك نعرف موتراً من الرتبة الأولى. S_i على النحو [$S_4 = \rho$ و $S_i = J_i$ ؛ $i = 1,2,3$] حيث ρ كثافة الشحنة و J كثافة التيار. اثبت أن المعادلة $S_\mu = \dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}$ تمثل بعض معادلات مأكسويل خذ $x_4 = t$.

الحل:

بما أن الموتر ملتوي التماثل إذاً يمكن كتابة العلاقة التالية:

$$F_{\mu\lambda} = -F_{\lambda\mu} \qquad (115.6)$$

ومنها نجد أن:

$$F_{\mu\mu} = 0 \qquad (116.6)$$

أي أن جميع العناصر القطرية تساوي صفراً؛ ومن تعريـف الموتـر F_{ij} يمكـن كتابة بقية العناصر على الصورة:

$$\left.\begin{array}{l} F_{12} = H_3 \\ F_{23} = H_1 \\ F_{31} = H_2 \end{array}\right\} \qquad (117.6)$$

ومن التعريف $F_{i4} = -D_i$ ؛ $i = 1,2,3$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} F_{14} = -D_1 \\ F_{24} = -D_2 \\ F_{34} = -D_3 \end{array}\right\} \qquad (118.6)$$

من المعادلات (117.6) و (118.6) واستخدام خاصيـة التـواء التمـاثل يمكـن كتابة مصفوفة الموتر F_{ij} على الصورة:

$$[F_{\mu\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (119.6)$$

المعادلة $\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} = S_\mu$ يمكن كتابتها بشكل مفصل على النحو:

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = S_1 = J_1 \qquad (120.6)$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_4}=S_2=J_2 \qquad (121.6)$$

$$\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{33}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_4}=S_3=J_3 \qquad (122.6)$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{44}}{\partial x_4}=S_4=J_4 \qquad (123.6)$$

بالتعويض عن قيم عناصر الموتر F_{ij} من المعادلة *(119.6)* يمكن كتابة المعادلة *(123.6)* على الصورة

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}+\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = \rho$$

المعادلة الأخيرة يمكن وضعها على الصورة:

$$\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{D} = \rho \qquad (124.6)$$

المعادلة السابقة تمثل أحد معادلات ماكسويل. وبالتعويض عن قيم عناصر الموتر F_{ij} في المعادلات [*(120.6)* ← *(122.6)*] نحصل على:

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2}-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial D_1}{\partial t} = J_1 \qquad (125.6)$$

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial D_2}{\partial t} = J_2 \qquad (126.6)$$

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial D_3}{\partial t} = J_3 \qquad (127.6)$$

بضـــرب طـــرفي المعـــادلات [(125.6) ← (127.6)] في وحـــدات المتجـــه ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) ثم جمع تلك المعادلات نحصل على الصورة:

$$\underset{\sim}{\nabla} . \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{\vec{J}} + \frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial t} \qquad (128.6)$$

وهذه أيضاً تمثل أحد معادلات ماكسويل وهو المطلوب.

مثال (5.6)

استخدم المعادلة (39.2) والتي تعطى بالعلاقة:

$$\in_{ijk} \det A = \in_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn}$$

لإيجاد قيمة المحدد $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$؟

الحل:

بما أن $\in_{123} = 1$ إذاً بوضع [$i = 1$ و $j = 2$ وكذلك $k = 3$] في المعادلة (39.2) نحصل على:

$$\det A = \in_{lmn} A_{1l} A_{2m} A_{3n} \qquad (129.6)$$

بفك الجمع حول الأدلة (l, m, n) للمعادلة (124.6) نجد أن

$$\det A = \in_{123} A_{11} A_{22} A_{33} + \in_{132} A_{11} A_{23} A_{32} + \in_{312} A_{13} A_{21} A_{32}$$
$$+ \in_{321} A_{13} A_{22} A_{31} + \in_{231} A_{12} A_{23} A_{31} + \in_{213} A_{12} A_{21} A_{33}$$

(130.6)

بالتعويض عن قيم $\in_{l\,m,n}$ وكذلك قيم عناصر المحدد A في المعادلة (130.6) نحصل على:

$$det\ A = (+1)(2)(0)(-6) + (-1)(2)(-5) + (+1)(-4)(1)(-5)$$
$$+ (-1)(-4)(0)(0) + (+1)(-3)(-2)(0) + (-1)(-3)(1)(-6)$$

ومنها نجد أن

$$det\,A = -18 \qquad (131.6)$$

وهو المطلوب.

مثال (6.6)

أثبت أن التحويلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1\cosh\alpha - c\,t\sinh\alpha \\ \bar{x}_2 &= x_2 \\ \bar{x}_3 &= x_3 \\ \bar{t}\ &= t\cosh\alpha - \frac{x_1}{c}\sinh\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (132.6)$$

في الفضاء الرباعي تمثل نفس تحويلات لورنتز المعادلة (55.6) ؛ حيث يعرف ($tanh\ \alpha = \frac{V}{c} = \beta$ و $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$).

الحل:

بأخذ $\cosh\alpha$ كعامل مشترك من المعادلات (132.6) والتعويض عن قيمة $\tanh\alpha$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1=\cosh\alpha(x_1-tv) \\ \bar{x}_2=x_2 \\ \bar{x}_3=x_3 \\ \bar{t}\ =\cosh\alpha(t-\dfrac{\beta}{c}x_1) \end{array}\right\} \quad (133.6)$$

وبما أن $\sinh^2\alpha=\cosh^2\alpha-1$

وبالقسمة على $\cosh^2\alpha$ والتعويض عن قيمة $\tanh\alpha$ نجد أن:

$$\beta^2=\frac{\cosh^2\alpha-1}{\cosh^2\alpha} \quad (134.6)$$

يمكن اعادة كتابة المعادلة (134.6) على الصورة:

$$\cosh^2\alpha=\frac{1}{(1-\beta^2)}=\gamma^2$$

إذاً نحصل على:

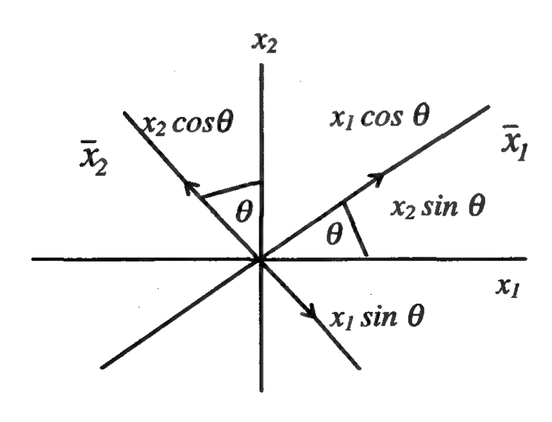
$$\cosh\alpha=\gamma \quad (135.6)$$

بالتعويض عن قيمة $\cosh\alpha$ من المعادلة (135.6) في المعادلة (133.6) نحصل على نفس المعادلة (55.6) التي تمثل تحويلات لورنتز وهو المطلوب.

مثال (7.6)

أوجد مصفوفة التحويل عند دوران محاور الإحداثيات الكارتيزية حول المحور x_3 خلال زاوية θ كما هو مبيّن [بالرسم (1.6)] ثم أوجد مصفوفة التحويل:

الحل:



شكل رقم 1.6

من الرسم وبجمع مركبات المحاور (x_3, x_2, x_1) الساقطة على المحاور الجديدة $(\bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1)$ نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ \bar{x}_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{array}\right\}. \qquad (136.6)$$

$(\bar{x}_1\, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ هي مركبات موتر من الرتبة الأولى، المعادلة (136.6) يمكن كتابتها على شكل مصفوفة على النحو:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (137.6)$$

إذاً مصفوفة التحويل $[A_{ij}]$ تكتب على الصورة

$$[A_{ij}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (138.6)$$

وبهذا نستنتج أن الموتر من الرتبة الأولى يمكن أن يعرف على أساس الكمية التي يتم تحويل مركباتها على الصورة:

$$\bar{x}_i = A_{ij} x_i \qquad (139.6)$$

من المعادلة (138.6) يمكن ايجاد معكوس $[A_{ij}]$ على النحو:

$$[A_{ij}]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (140.6)$$

ومنها نجد أن التحويل العكسي يكتب على الصورة:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (141.6)$$

وهو المطلوب.

مثال (8.6)

ضع معادلة بقاء الشحنة $\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$؛ حيث ρ كثافة الشحنة و $\underset{\sim}{J}$.
كثافة التيار في صورة موتر في الفضاء الرباعي:

الحل:

بما أن معادلة بقاء الشحنة تعطى بالصورة:

$$\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (142.6)$$

ونفترض أن لدينا المعادلة التالية:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (143.6)$$

حيث تمثل المعادلة السابقة تغير مركبات موتر التيار في الفضاء الرباعي $(x_4 = ict\,,\ \mu = 1, 2, 3, 4)$. بفك حدود المعادلة (143.6) حول الدليل μ نجد أن:

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4} = 0 \qquad (144.6)$$

وبما أن الحدود الثلاثة الأولى تمثل تباعد دالة مركبة كثافة التيار في الفضاء ذي ثلاثي أبعاد أي أن $(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{J})$ ، وبالمقارنة بين المعادلة (142.6) والمعادلة (144.6) بالنسبة إلى الحد $\frac{\partial J_4}{\partial x_4}$ نجد أن:

$$J_4 = i\,c\,\rho \qquad (145.6)$$

وبهذا فإن $J_\mu = (\underset{\sim}{J}, ic\rho)$, والمعادلة *(143.6)* تمثل معادلة بقاء الشحنة في الفضاء الرباعي في صورة موتر وهو المطلوب. وبهذا فإن قانون بقاء شحنة يكون صحيحاً في جميع مناطات الاسناد القصور الذاتية.

مثال (9.6)

ضع معادلة القوة التي تؤثر على شحنة تقع في مجال كهربائي ومغناطيسي وتسمى بقوة لورنتز والتي تعطى بالعلاقة $\underset{\sim}{F} = \rho \underset{\sim}{E} + \frac{1}{c} \underset{\sim}{J} \wedge \underset{\sim}{H}$ ، في شكل موتر في الفضاء الرباعي.

الحل:

أولاً نقوم بإعادة كتابة معادلة قوة لورنتز على النحو:

$$\underset{\sim}{F} = \rho \underset{\sim}{E} + \frac{1}{c} \underset{\sim}{J} \wedge \underset{\sim}{H} \qquad (146.6)$$

بفك مركبات القوة للمعادلة *(146.6)* نجد أن:

$$F_1 = \rho E_1 + \frac{1}{c} (J_2 H_3 - J_3 H_2) \qquad (147.6)$$

بالاستعانة بالموتر $[F_{\mu\lambda}]$ المعرف في المعادلة *(119.6)* والتعويض عن قيمة $(\rho = \frac{J_4}{ic})$ من المعادلة *(145.6)* نحصل على:

$$F_1 = \left(\frac{J_4}{ic}\right)\left(\frac{F_{14}}{-i}\right) + \frac{J_2 F_{12} + J_3 F_{31}}{c} \qquad (148.6)$$

حيث $\underset{\sim}{D}=\epsilon_o \underset{\sim}{E}$ وبفرض أن $\epsilon_0 = 1$ يمكـن اعـادة كتابـة المعادلـة السـابقة على الصورة:

$$F_1 = \frac{1}{c} \{F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 + F_{14} J_4\} \qquad (149.6)$$

وكذلك بالنسبة للمركبات F_2 و F_3 ، أما بالنسـبة للمركبـة الرابعـة والـتي تكتب على النحو:

$$F_4 = \frac{1}{c} \{F_{14} J_1 + F_{42} J_2 + F_{43} J_3 + F_{44} J_4\} \qquad (150.6)$$

فإنه بعد التعويض عن قيم عناصر الموتر $[F_{\mu\lambda}]$ نحصل على:

$$F_4 = \frac{1}{c} \{E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3\} \qquad (151.6)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F_4 = \frac{1}{c} \underset{\sim}{E} . \underset{\sim}{J} \qquad (152.6)$$

المعادلة *(51.6)* ، والمعادلة *(149.6)* يمكن وضعهما في معادلـة واحـدة علـى النحو:

$$F_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\lambda} J_\lambda \qquad (153.6)$$

وهذه المعادلة هـي قـوة لورنتز في صـورة موتـر في الفضـاء الربـاعي وهـو المطلوب.

تمارين

1- اثبت أن طاقة الحركة لجسم جاسئ يدور تعطى بالعلاقة $T = \frac{1}{2} I_{jl}\, \omega_j\, \omega_l$
حيث I_{jl} موتر القصور الذاتي و ω السرعة الزاوية.

2- إذا عرفنا الموتر من الرتبة الثانية $[Q_{\mu\lambda}]$ ملتوي التماثل في الفضاء الرباعي بحيث $Q_{12} = B_3$ (وبقية المركبات تعرف بشكل دوري بتغير الأدلة) حيث B تمثل مركبة المجال المغناطيسي وقيمة $[Q_{i4}]$ حيث $i = 1, 2, 3$ تعطى بـ $Q_{i4} = E_i$ ، E_i تمثل مركبة المجال الكهربي (ضع $x_4 = t$ للتبسيط):

أ - اكتب مصفوفة الموتر $[Q_{\mu\lambda}]$.

ب- اثبت إن المعادلة $\frac{\partial Q_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial Q_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial Q_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$ تمثل بعض معادلات ماكسويل مع ملاحظة أن (μ, ν, λ) لا تأخذ نفس القيم في كل مرة.

3- اثبت صحة العلاقة $(curl\ \underset{\sim}{A}) = - \in^{ijk} A_{j,k}$.

4- أوجد قيمة المحدد $det\, A$ حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$؟

5- اثبت أن سرعة جسم تعطى بالعلاقة $\underset{\sim}{V} = V^i e_i = \frac{d x^i}{d t} \hat{e}_i$ وعجلته تعطى بالعلاقة $\underset{\sim}{a} = \left(\frac{d v^3}{d t} + \Gamma^m_{kl} V^k V^l \right) \hat{e}_m$.

6- حلل $\in_{ijk} \in_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn}$ حيث تمثل A أي مصفوفة اختيارية.

7- أ- اثبت أن معادلات مأكسويل ليست لازمة تحت عملية التحويلات الجاليلية.

ب- اثبت أن معادلات ماكسويل تمثل كمية لازمة تحت تحويلات لورنتز.

8- اثبت أن $\delta_{ij} \in_{ijk} = 0$.

9- اثبت المتطابقة:

$$(\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}).(\underset{\sim}{C} \wedge \underset{\sim}{D}) = (\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{C})(\underset{\sim}{B}.\underset{\sim}{D}) - (\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{D})(\underset{\sim}{B}.\underset{\sim}{C})$$

بإستخدام الموتر الزائف $\in_{ijk}$.

المراجـــع

[1] Tinkham, M. Group Theory and Quantum Mechanics , Mc Graw - Hill, New York (1964).

[2] Wangsness, k.R., Introduction Topics in Theoretical Physics, Johnwiley and Sons, Inc, NewYork (1963).

[3] SPAIN, B., Tensor Calculus , Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, England (1965).

[4] HARRIS, G. E., Introduction To Modern Theoretical Physics, volume 1. John wiley and sons, New York (1975).

[5] HARPER, C., Introduction to mathematical Physics, Prentice - Hall, Inc. Englewood cliffs, New Hersey (1976).

[6] ARFKEN, G., Mathematical Methods For Physicists, Third edition, Academic Press, INC., Orlando, Florida (1985).

[7] SPIEGEL, R.M., Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, Schaum's Outline Servies. McGraw-Hill (1959).